МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л. А. Лопатнюк, А. С. Марков, Е. И. Подашевская

ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ. ПРАКТИКУМ

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области сельского хозяйства в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальности 1-74 01 01 «Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса»

Минск
БГАТУ
2019

УДК 330.43+519.8](07)
ББК 65в6я7
Л77

Рецензенты:
кафедра математического моделирования
экономических систем АПК БГСХА
(доктор экономических наук, доцент,
заведующий кафедрой *В. И. Буць*);
кандидат экономических наук, доцент,
декан экономического факультета ГГАУ *А. В. Грибов*

Лопатнюк, Л. А.
Л77 Эконометрика и экономико-математические методы и модели. Практикум : учебно-методическое пособие / Л. А. Лопатнюк, А. С. Марков, Е. И. Подашевская. – Минск : БГАТУ, 2019. – 176 с.
ISBN 978-985-25-0012-8.

Представлены задания к практическим занятиям и лабораторные работы, в которых изложены цели занятий, краткая теория, методические указания по выполнению заданий и вопросы для контроля результатов обучения.

Для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальности 1-74 01 01 «Экономика и организация производства в отраслях агропромышленного комплекса» (дневная форма обучения).

УДК 330.43+519.8](07)
ББК 65в6я7

ISBN 978-985-25-0012-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель дисциплины – формирование у студентов системы знаний, умений и профессиональных компетенций в области разработки и обоснования экономически эффективных плановых и прогнозных программ развития объектов АПК на основе эконометрического и экономико-математического моделирования.

Достижение данной цели обусловливает разработку и внедрение непосредственно в хозяйственную деятельность соответствующих методов, методик, приемов и средств эконометрического и экономико-математического моделирования. Пособие позволит сформировать у будущих специалистов практические навыки, дающие возможность обосновывать плановые и прогнозные параметры развития объектов АПК, обеспечивать их сбалансированность, оптимальность и пропорциональность, выявлять и закреплять прогрессивные тенденции в экономике и социальной сфере, принимать эффективные управленческие решения.

Сельскохозяйственную направленность имеют подобранные к каждому из разделов задачи, в процессе решения которых студенты получают более глубокие знания и имеют возможность разобраться в вопросах практического применения методов оптимизации и моделирования. Тематика лабораторных работ и практических занятий связана с количественной оценкой закономерностей развития объектов АПК, поиском оптимальных вариантов их развития и механизмом реализации эффективных управленческих решений, оценкой эффективности использования ресурсного потенциала АПК.

Задания составлены с учетом реальных производственных ситуаций с описанием возможных способов их решения при помощи одной из наиболее распространенных компьютерных программ, позволяющей использовать широкий спектр расчетов различного рода, – Microsoft Excel.

Лабораторная работа № 1

ПРОВЕРКА СООТВЕТСТВИЯ ДАННЫХ ЗАКОНУ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ (ПИРСОНА)

***Цель работы*:** изучить и проверить массовые данные на качественную и количественную однородность, выявить и удалить резко выделяющиеся значения показателей.

Теоретические сведения

Важнейшим требованием к информации при использовании массовых данных является ее качественная и количественная однородность. Качественная однородность предполагает, что обследованию будут подвергаться наблюдения или объекты, схожие друг с другом. Использование разнородных объектов будет искажать характер связи между отдельными признаками.

Для большинства экономических показателей характерно распределение данных, близкое к нормальному. *Нормальное распределение* получают из ряда наблюдений, вариация которых обусловлена воздействием большого числа мелких беспорядочных или случайных влияний (рис. 1).

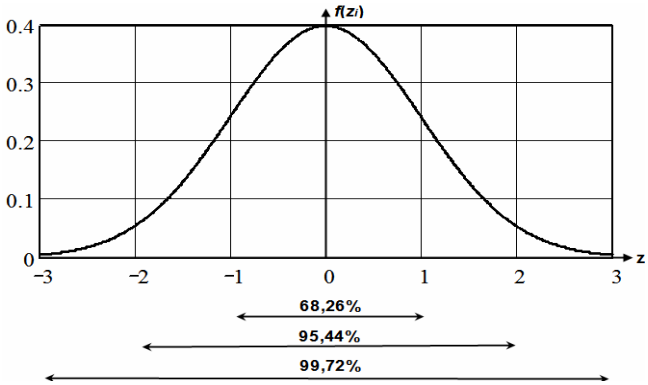


Рис. 1. График нормального распределения

Кривая нормального распределения предполагает, что наиболее часто встречаются значения признака, близкие к его среднему значению. По мере удаления от среднего значения число наблюдений или вероятность наступления события уменьшается. Причем 68,26 % случаев попадает в интервал от ($\bar{x}$ – σ_x) до ($\bar{x}$ + σ_x); 95,46 % – от ($\bar{x}$ – 2σ_x) до ($\bar{x}$ + 2σ_x); 99,73 % – от ($\bar{x}$ – 3σ_x) до ($\bar{x}$ + 3σ_x). В последний интервал попадает подавляющее большинство случаев при нормальном распределении.

Исходная информация, которая будет использована для построения эконометрических моделей, должна быть достоверной. Для проверки информации на достоверность необходимо рассчитать и оценить два показателя: асимметрию (А) и эксцесс (Э). Эти показатели определяются по формулам

$$\text{А} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{n\sigma_x^3};$$

$$\text{Э} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{n\sigma_x^4} - 3,$$

где X_i – фактическое значение показателя;

X – среднее значение показателя;

n – количество опытов;

σ_x – среднеквадратическое отклонение, которое рассчитывается по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}}.$$

Если параметры А и Э равны нулю, то исходная информация в полной мере считается достоверной. Такой идеальный вариант при изучении экономических явлений и процессов встречается крайне редко.

Если асимметрия принимает положительное значение, то соответствующее поле вероятностей сдвигается вправо относительно графика нормального распределения. При отрицательном коэффициенте асимметрии график перемещается влево.

Конкретное значение эксцесса определяется перемещением графика распределения вероятностей по вертикали. В частности, если поле вероятностей островершинно, то Э > 0. В свою очередь, уменьшение коэффициента Э приводит к тому, что изучаемый график становится все более пологим.

В связи с этим встает вопрос о возможных границах отклонений коэффициентов А и Э от нулевых значений. Информацию можно считать достоверной и пригодной для дальнейшей обработки, если выполняются следующие два неравенства:

$$|\text{А}| \le 3\sigma_{\text{А}};$$

$$|\text{Э}| \le 5\sigma_{\text{Э}}.$$

В приведенных формулах $\sigma_{\text{А}}$ и $\sigma_{\text{Э}}$ представляют собой ошибки асимметрии и эксцесса, которые определяются по формулам

$$\sigma_{\text{А}} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}};$$

$$\sigma_{\text{Э}} = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}}.$$

Ошибки асимметрии и эксцесса зависят только от числа опытов n.

На этапе проверки информации на достоверность рекомендуется удалить данные, которые резко выделяются из изучаемой совокупности, – слишком высокие или низкие значения показателей. О том, что такие значения имеют место, сигнализирует выход коэффициентов асимметрии и эксцесса за допустимые границы. Выделить эти «нестандартные» значения позволяет правило трех сигм:

$$\left|X_i - \overline{X}\right| \le 3\sigma_x.$$

Если какое-либо значение не удовлетворяет правилу трех сигм, оно подлежит удалению. Одновременно следует удалить всю строку

(опыт, объект, предприятие и т. д.), к которой это значение принадлежит. Объекты, которые необходимо удалить из изучаемой совокупности, подвергаются детальному монографическому анализу. После удаления лишних опытов целесообразно рассчитать новые значения асимметрии и эксцесса и убедиться в достоверности оставшейся части информации.

Проверка гипотезы о предполагаемом законе распределения может проводиться при помощи так называемых критериев согласия. Универсальным является χ^2-критерий Пирсона, как критерий, наиболее часто употребляемый для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки некоторому теоретическому закону распределения. Критерий Пирсона дает ответ на вопрос, различаются ли эмпирические и теоретические частоты.

Суть критерия Пирсона состоит в вычислении критерия χ^2 по формуле

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

где k – число разрядов наблюдаемых значений;

n_i – эмпирические частоты, полученные из выборки;

n_i' – теоретические частоты, найденные теоретическим путем.

Чем меньше разность $(n_i - n_i')$, тем ближе эмпирическое распределение к теоретическому.

Алгоритм вычислений при помощи критерия Пирсона состоит в выполнении следующих действий:

1. По данным выборки получить статистическое распределение наблюдаемого признака.

2. Вычислить теоретические частоты признака, какими они были бы, если бы признак действительно был распределен в соответствии с данным законом.

3. По приведенной выше формуле вычислить эмпирическое значение критерия χ^2_{emp}.

4. По таблице критических значений критерия Пирсона определить значение χ^2_{cr} на необходимом уровне значимости α при заданном числе степеней свободы s. Число степеней свободы вычисляется по формуле

$$s = k - 1 - r,$$

где k – число разрядов наблюдаемых значений;

r – число параметров предполагаемого распределения (в случае нормального или равномерного распределения $r = 2$).

5. Если $\chi^2_{emp} < \chi^2_{cr}$, принять основную гипотезу, в этом случае на заданном уровне значимости можно утверждать, что статистическое распределение изучаемого параметра подчинено нормальному закону распределения. Если же имеет место обратное неравенство $\chi^2_{emp} \geq \chi^2_{cr}$, принимают альтернативную гипотезу: статистическое распределение отличается от нормального.

Методика выполнения работы

Задача. Исходя из информации о посещаемости студентами занятий и их успеваемости (табл. 1) рассчитать асимметрию и эксцесс.

Таблица 1

Исходные данные для расчета асимметрии и эксцесса

№	Количество пропусков занятий	Оценка на экзамене	№	Количество пропусков занятий	Оценка на экзамене
1	1	8	14	1	5
2	4	5	15	4	3
3	3	4	16	3	7
4	0	7	17	2	5
5	2	7	18	0	7
6	6	2	19	1	9
7	5	1	20	5	6
8	1	10	21	3	5
9	0	9	22	2	7
10	7	3	23	3	3
11	4	5	24	2	8
12	3	4	25	0	10
13	2	6			

Решение

Расчет асимметрии и эксцесса можно выполнить в табличной форме на примере информации о пропусках занятий (табл. 2).

Таблица 2

Порядок расчета асимметрии и эксцесса
на примере информации о пропусках занятий

№	X_i	$(X_i - \overline{X})$	$(X_i - \overline{X})^2$	$(X_i - \overline{X})^3$	$(X_i - \overline{X})^4$
1	1	–1,56	2,4336	–3,7964	5,9224
2	4	1,44	2,0736	2,9860	4,2998
3	3	0,44	0,1936	0,0852	0,0375
…					
25	0	–2,56	6,5536	–16,7772	42,9497
Итого	64	–	88,16	83,5008	808,6177
Среднее значение	2,56	–	3,5264	3,34	32,34

Результат расчета по соответствующим формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{88,16}{25}} = \sqrt{3,5264} = 1,88;$$

$$А_x = \frac{83,5008}{25 \cdot 1,88^3} = 0,503;$$

$$Э_x = \frac{808,6177}{25 \cdot 1,88^4} - 3 = -0,411.$$

Асимметрия и эксцесс также рассчитываются с помощью стандартных функций Excel – СКОС и ЭКСЦЕСС (рис. 2).

При $n = 25$:

– ошибка асимметрии

$$\sigma_А = \sqrt{\frac{6 \cdot 25 \cdot (25-1)}{(25-2)(25+1)(25+3)}} = 0,464;$$

– ошибка эксцесса

$$\sigma_Э = \sqrt{\frac{24 \cdot 25 \cdot (25-1)^2}{(25-3)(25-2)(25+3)(25+5)}} = 0{,}902.$$

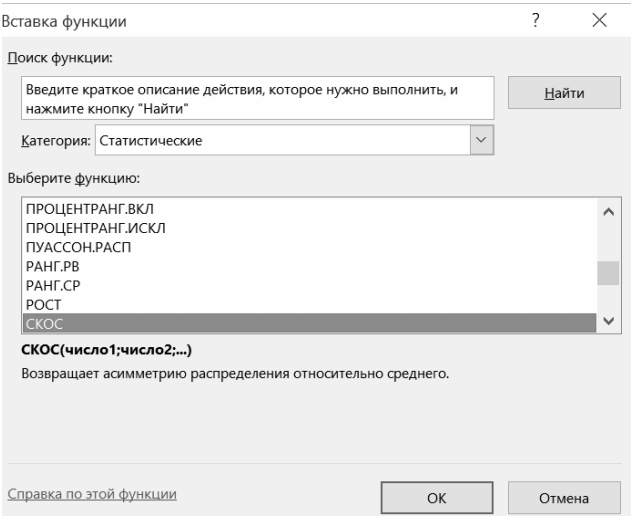


Рис. 2. Выбор функции СКОС среди статистических функций

Так как асимметрия по факторному признаку меньше трех ошибок ($0{,}503 \leq 3 \cdot 0{,}464$), а эксцесс по модулю ниже пяти соответствующих ошибок ($0{,}411 \leq 5 \cdot 0{,}902$), то информацию о пропусках занятий следует считать достоверной.

Асимметрия и эксцесс по результативному показателю также находятся в допустимых пределах ($А_y = -0{,}055$, $Э_y = -0{,}764$).

Рассмотрим значения количества пропусков занятий и применим правило трех сигм в отношении первых двух студентов:

$$|X_1 - \overline{X}| = |-1{,}56| \leq 3 \cdot 1{,}88;$$

$$|X_2 - \overline{X}| = |1{,}44| \leq 3 \cdot 1{,}88.$$

Результаты расчетов показали, что по остальным студентам правило трех сигм в отношении факторного показателя также соблюдается. При рассмотрении результативного показателя, т. е. оценок

на экзамене, выявлено, что и в этом случае модуль отклонения фактических значений от средней оценки не превышает трех сигм ($\overline{Y} = 5{,}84$, σ_y = 2,395). Это утверждение проверяется на примере оценок, полученных седьмым и восьмым студентами, – минимальной и максимальной:

$$|Y_7 - \overline{Y}| = |1 - 5{,}84| \le 3 \cdot 2{,}395;$$

$$|Y_8 - \overline{Y}| = |10 - 5{,}84| \le 3 \cdot 2{,}395.$$

Если при этих значениях правило трех сигм соблюдается, то остальные можно не проверять.

Таким образом, исходная информация по всем студентам группы является достоверной. Это подтверждают коэффициенты асимметрии и эксцесса, а также правило трех сигм. Можно использовать правило трех сигм в любом случае, даже если асимметрия или эксцесс не выходят за допустимые границы. Это связано с тем, что в некоторых случаях нарушения асимметрии и эксцесса являются допустимыми, а правило трех сигм не соблюдается.

Задание для самостоятельного выполнения

Проверить на достоверность все столбцы табл. 3 и 4. Для расчетов использовать программный продукт Excel.

Таблица 3

Информация для изучения объема продаж

№	Объем продаж, ед.	Цена реализации, усл. д. ед.	Затраты по стимулированию сбыта, усл. д. ед.	Количество торговых агентов, чел.
1	120 300	21,1	225 600	2
2	90 100	19,5	37 400	1
3	112 500	22,3	260 500	4
4	109 800	22,9	356 800	5
5	97 800	22,7	207 000	3
6	118 900	26,5	688 700	3
7	84 000	23,4	153 500	2

Окончание таблицы 3

№	Объем продаж, ед.	Цена реализации, усл. д. ед.	Затраты по стимулированию сбыта, усл. д. ед.	Количество торговых агентов, чел.
8	70 400	26,4	88 700	2
9	99 800	25,8	383 200	8
10	89 100	25,1	176 700	2
11	72 200	27,4	137 600	2
12	97 000	26,5	284 400	4
13	108 000	28,6	384 600	5
14	69 100	29,0	174 000	2
15	95 200	27,9	353 300	5
16	86 000	28,5	286 200	4
17	61 300	29,1	176 100	3
18	71 300	32,1	251 700	3
19	66 500	27,7	231 900	4
20	92 300	30,2	415 400	4
21	82 300	33,1	376 000	5
22	73 300	33,2	323 600	4
23	52 800	29,9	218 600	3
24	97 400	31,1	697 800	6
25	69 400	30,6	340 700	4
26	41 300	35,2	230 100	3
27	63 900	35,9	496 800	5
28	81 700	27,0	271 000	3
29	96 900	23,7	313 000	3
30	72 200	28,6	214 400	3

Таблица 4

Информация о живой массе и настриге шерсти овец

№	Живая масса животного, кг	Настриг шерсти, кг
1	50,2	5,3
2	50,3	6,2
3	50,4	5,0
4	51,0	5,7
5	51,2	6,3
6	51,4	5,4
7	51,6	6,8
8	51,9	7,3

Окончание таблицы 4

№	Живая масса животного, кг	Настриг шерсти, кг
9	52,3	6,6
10	52,4	6,2
11	62,4	6,6
12	52,9	6,3
13	53,0	6,7
14	53,2	7,8
15	53,5	6,8
16	53,6	7,2
17	54,3	7,7
18	54,7	8,5
19	55,2	7,8
20	55,5	8,4
21	56,5	8,8

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о качественной и количественной однородности массовых данных.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какое распределение называют нормальным?
2. Каким требованиям должно удовлетворять нормальное распределение?
3. Какие показатели рассчитывают при проверке информации на достоверность?
4. Каким образом выявляют резко выделяющиеся варианты?
5. Каким условиям должны удовлетворять значения асимметрии и эксцесса?

Лабораторная работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗНАЧИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

***Цель работы*:** освоить методику выбора факторного показателя из множества возможных.

Теоретические сведения

В регрессионном анализе имеется вероятностная зависимость между факторным (X) и результативным (Y) показателями, т. е. каждому значению переменной X соответствует условное математическое ожидание значения случайной величины Y.

Основными задачами корреляционного анализа являются определение наличия связи между отобранными признаками, установление ее направления и количественная оценка тесноты этой связи. Для этого оценивается матрица парных коэффициентов корреляции, затем на ее основе определяются частные и множественные коэффициенты корреляции и детерминации. После нахождения значений коэффициентов проверяют их значимость. Конечный результат корреляционного анализа – это отбор факторных признаков X для дальнейшего построения уравнения регрессии, позволяющего количественно описать найденную взаимосвязь.

Корреляционный анализ начинается с расчета *парного (линейного) коэффициента корреляции*, представляющего собой меру линейной зависимости между двумя переменными на фоне действия остальных переменных, входящих в модель.

Расчет коэффициента парной корреляции r_{yx} может быть осуществлен по формуле

$$r_{yx} = \frac{\overline{yx} - \overline{y}\,\overline{x}}{\sigma_y \sigma_x},$$

где $\overline{y}$ – среднее арифметическое значение y;

$\overline{x}$ – среднее арифметическое значение x;

$\overline{yx}$ – среднее арифметическое значение из произведений y и x;

σ_y – среднеквадратическое отклонение признака y;

σ_x – среднеквадратическое отклонение признака x.

Парный коэффициент корреляции изменяется в пределах от –1 до +1. Абсолютное значение, равное единице, свидетельствует о том, что функциональная связь при –1 обратная (отрицательная), при +1 – прямая (положительная). Нулевое значение коэффициента указывает на отсутствие линейной связи между признаками.

Качественная оценка полученным количественным значениям парных коэффициентов корреляции дается на основе шкалы, представленной в табл. 1.

Таблица 1

Шкала оценок парных коэффициентов корреляции

Значение коэффициента (по модулю)	Качественная характеристика силы связи
< 0,3	практически отсутствует (слабая)
0,3–0,7	средняя
0,7–0,9	высокая
0,9–0,99	весьма высокая

Для проверки значимости коэффициента корреляции рассматривается гипотеза H_0 о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции. Статистика для проверки этой гипотезы вычисляется по формуле

$$t_{\text{р}} = \frac{r_{yx}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{yx}^2}},$$

где n – число наблюдений.

Эта статистика имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$. Если $|t_{\text{р}}| > t_{\text{кр}}$, где $t_{\text{кр}}$ – табличное значение распределения Стьюдента на заданном уровне значимости (например, $\alpha = 0{,}05$), то гипотеза H_0 отвергается. Если рассматривается вариант нескольких факторных переменных, то расчеты коэффициентов парной корреляции и их значимости производятся отдельно.

Методика выполнения работы

Задача. Необходимо установить силу и направление связи между заданными признаками, рассчитав коэффициенты парной корреляции r_{yx}.

Решение

1. Открыть файл Excel, содержащий необходимые данные.
2. Выбрать рабочий лист с информацией, подлежащей анализу.
3. Выполнить команду **Данные → Анализ данных…**
4. В диалоговом окне **Анализ данных** выбрать инструмент анализа **Корреляция** и нажать на кнопку **ОК**. Появится диалоговое окно, представленное на рис. 1.

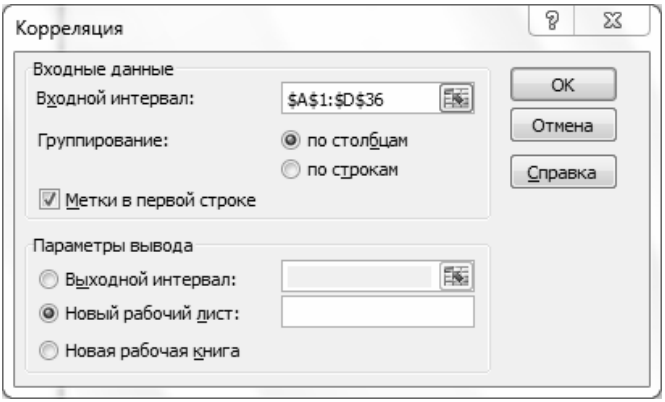


Рис. 1. Диалоговое окно «Корреляция»

5. В поле **Входной интервал** указать диапазон ячеек, содержащий значения признаков, которые подлежат изучению.
6. Установить флажок **Метки в первой строке**, если в первой строке содержатся названия изучаемых признаков.
7. В поле **Новый рабочий лист** указать имя, соответствующее его содержанию, и нажать на кнопку **ОК**, создав новый рабочий лист, на который будет выведена корреляционная матрица. Например, если использовать информацию по формированию объема продаж (лабораторная работа № 1), результаты будут соответствовать представленным на рис. 2.

	A	B	C	D	E
1		Объем продаж, ед.	Цена реализации, ден. ед.	Затраты по стимулированию сбыта, ден. ед.	Количество торговых агентов, чел.
2	Объем продаж, ед.	1			
3	Цена реализации, ден. ед.	-0,635562	1		
4	Затраты по стимулированию сбыта, ден. ед.	0,3700224	0,363502317	1	
5	Количество торговых агентов, чел.	0,2196089	0,32604783	0,654229079	1

Рис. 2. Рабочий лист «Корреляция»

Из данных следует, что наиболее сильная связь существует между объемом продаж (результативный показатель) и ценой реализации единицы товара (–0,636). Данная связь является обратной.

Значимость коэффициента корреляции подтверждена, т. к. гипотеза H_0 была отклонена ($|t_р| > t_{кр}$, поскольку $|t_р| = 4{,}35$, $t_{кр} \approx 2{,}48$).

Задание для самостоятельного выполнения

По данным табл. 2 определить наиболее существенный фактор, влияющий на урожайность зерновых, и проверить значимость коэффициента корреляции.

Таблица 2

Информация для изучения урожайности зерновых культур

№	Урожайность зерновых, ц с 1 га	Внесение удобрений, ц д. в. на 1 га	Плодородие 1 га пашни, балл
1	38,2	3,0	53
2	39,0	3,4	54
3	43,0	5,0	47
4	49,0	4,7	63
5	42,0	4,6	38
6	46,0	4,8	46
7	45,0	5,5	52
8	42,0	3,3	54
9	42,5	3,7	51
10	44,0	3,9	53
11	45,5	4,1	55
12	43,5	4,0	50
13	45,5	4,5	47

Окончание таблицы 2

№	Урожайность зерновых, ц с 1 га	Внесение удобрений, ц д. в. на 1 га	Плодородие 1 га пашни, балл
14	39,8	3,7	49
15	39,0	3,4	41
16	36,4	3,6	36
17	38,0	3,5	39
18	40,5	3,6	47
19	40,8	4,0	40
20	42,0	3,8	50
21	36,0	3,5	35
22	39,0	3,5	33
23	42,5	4,0	39
24	44,1	4,2	45
25	46,8	4,8	52
26	39,2	4,1	46

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о парных коэффициентах корреляции, проверке их значимости.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что определяют с помощью корреляционной матрицы?
2. Какая существует градация для определения качественной характеристики силы связи коэффициента парной корреляции?
3. Что определяет коэффициент парной корреляции?
4. Как выполняют проверку значимости коэффициента парной корреляции?
5. Что означают выражения «прямая связь», «обратная связь»?

Лабораторная работа № 3

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОДНОФАКТОРНОЙ РЕГРЕССИИ

***Цель работы*:** освоить методику построения однофакторной эконометрической модели.

Теоретические сведения

Эконометрическая (корреляционная) модель (КМ) – математическое выражение типа «уравнение», в котором выражается взаимосвязь между результативным показателем и одним или несколькими факторными показателями. В общем виде однофакторная линейная модель имеет вид:

$$y_x = a_0 + a_1 x,$$

где y_x – ожидаемое значение результативного показателя, который формируется под воздействием вектора-фактора x;

x – значение факторного показателя;

a_1 – коэффициент регрессии, который показывает, на сколько единиц изменяется результативный показатель при изменении фактора на единицу;

a_0 – свободный член, который выражает влияние на результативный показатель неучтенных факторов.

Методика выполнения работы

Как правило, на результативный показатель оказывают влияние многие факторы, Например, на продуктивность коровы влияет количество и качество корма, порода скота и т. д. Выбрав факторный показатель, приступают к построению уравнения регрессии. На практике связь между двумя переменными, если она есть, является вероятностной и графически выглядит как облако рассеивания эллипсоидной формы. Этот эллипсоид можно представить (аппроксимировать) в виде *линии регрессии.*

Выбрать форму связи между показателями – значит определить вид уравнения, которое наиболее точно описывает их взаимосвязь.

Для построения однофакторной линейной либо нелинейной формы связи в Excel необходимо выполнить следующие действия:

1. Построить поле корреляции, выбрав меню **Вставка**, тип диаграммы – точечная.

2. Щелкнуть левой кнопкой мыши по любой из точек диаграммы.

3. Выполнить команду меню **Работа с диаграммами → Макет → Анализ → Линия тренда** или в контекстном меню выбрать пункт **Добавить линию тренда…** Появится диалоговое окно, представленное на рис. 1.

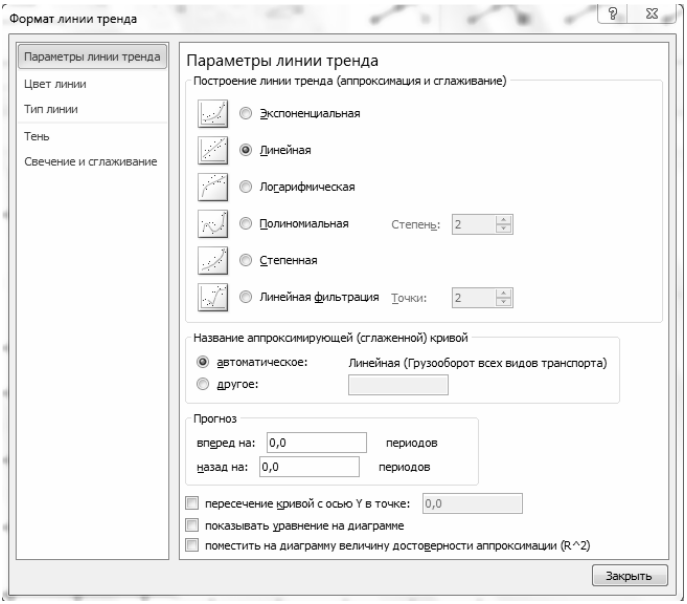


Рис. 1. Диалоговое окно «Формат линии тренда»

4. Выбрать необходимую математическую функцию щелчком левой кнопкой мыши. На диаграмме появится линия тренда.

5. Рассмотрев различные формы связи, выбрать ту, где связь между показателями наиболее сильна.

Задача. По данным табл. 1 построить эконометрическую модель зависимости настрига шерсти от живой массы овцы. Данные соответствуют требованиям закона нормального распределения.

Таблица 1

Зависимость настрига шерсти от живой массы овцы

№	Живая масса *X*, кг	Настриг шерсти *Y*, кг
1	50,2	5,3
2	50,3	6,2
3	50,4	5,0
4	51,0	5,7
5	51,2	6,3
6	51,4	5,4
7	51,6	6,8
8	51,9	7,3
9	52,3	6,6
10	52,4	6,2
11	52,9	6,3
12	53,0	6,7
13	53,2	7,8
14	53,5	6,8
15	53,6	7,2
16	54,3	7,7
17	54,7	8,5
18	55,2	7,8
19	55,5	8,4
20	56,5	8,8

Построить поле корреляции, выбрав меню **Вставка**, тип диаграммы – точечная. Выполнить команду **Работа с диаграммами → Макет → Анализ → Линия тренда** и построить линию зависимости между показателями.

В качестве линии тренда выбрать линейную зависимость и поставить «галочки» напротив опций «Показывать уравнение на диаграмме» и «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (*R*^2)».

На графике зависимости настрига шерсти от живой массы овцы появится линия тренда и уравнение линейной зависимости (рис. 2).

Аналогичным образом построить другие виды зависимости между показателями, такие как экспоненциальная, логарифмическая и т. д.

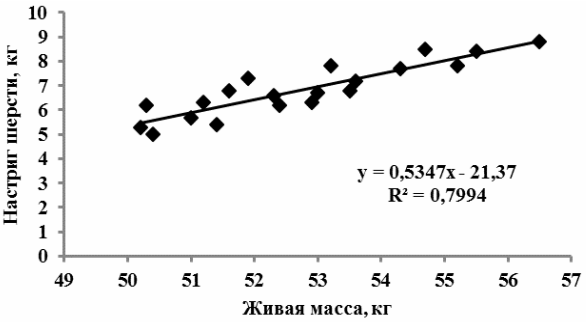


Рис. 2. Линия тренда и уравнение линейной зависимости на графике зависимости настрига шерсти от живой массы овцы

Наилучшей будет зависимость, у которой значение R^2 окажется наибольшим. В нашем случае:

– линейная: $y = 0{,}5347x - 21{,}37$, $R^2 = 0{,}7994$;

– степенная: $y = 5E - 0{,}7x^{4{,}1366}$, $R^2 = 0{,}7997$;

– полиномиальная (парабола): $y = 0{,}005x^2 + 0{,}4819x - 19{,}969$, $R^2 = 0{,}7994$.

Второй способ построения корреляционной модели – использование специального инструмента анализа «Регрессия», вызванного с помощью опции **Анализ данных**. В диалоговом окне необходимо указать входные интервалы Y и X (вместе с названиями) и поставить «галочку» напротив пункта «Метки» (рис. 3).

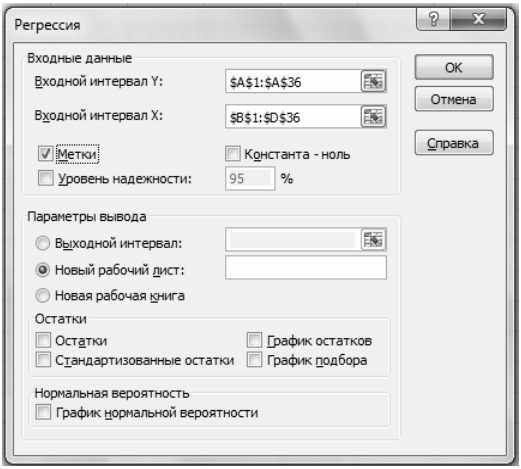


Рис. 3. Диалоговое окно «Регрессия»

На экране появится стандартизированный вывод итогов (рис. 4).

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,894063795		
R-квадрат	0,79935007		
Нормированный R-квадрат	0,788202852		
Стандартная ошибка	0,501567965		
Наблюдения	20		
Дисперсионный анализ			
	df	*SS*	*MS*
Регрессия	1	18,03973238	18,03973238
Остаток	18	4,52826762	0,251570423
Итого	19	22,568	
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*
Y-пересечение	-21,36980797	3,333196059	-6,41120642
живая масса, кг X	0,534732404	0,063146785	8,468085902

Рис. 4. Стандартизированный вывод итогов расчета

Следует помнить, что таким образом строятся только линейные зависимости.

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Построить однофакторные модели и изобразить графически динамику изменения продуктивности и поголовья коров в Республике Беларусь, представленную в табл. 2.

Таблица 2

Продуктивность и поголовье коров в Республике Беларусь (на конец года)

Показатель	Годы					
	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Удой на корову в год, кг	3110	4006	4125	4438	4690	4630
Поголовье коров, тыс. гол.	1565	1506	1459	1452	1445	1478

Окончание таблицы 2

Показатель	Годы						
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Удой на корову в год, кг	4479	4638	4506	4508	4722	4815	5005
Поголовье коров, тыс. гол.	1477	1519	1525	1533	1512	1503	1500

Задание 2. Используя данные табл. 3, выбрать наиболее существенный фактор, влияющий на урожайность зерновых, и построить однофакторную эконометрическую модель линейного типа.

Таблица 3

Информация для изучения урожайности зерновых

№	Урожайность зерновых, ц с 1 га	Внесение удобрений, ц д. в. на 1 га	Плодородие 1 га пашни, балл
1	38,2	3,0	53
2	39,0	3,4	54
3	43,0	5,0	47
4	49,0	4,7	63
5	42,0	4,6	38
6	46,0	4,8	46
7	45,0	5,5	52
8	42,0	3,3	54
9	42,5	3,7	51
10	44,0	3,9	53
11	45,5	4,1	55
12	43,5	4,0	50
13	45,5	4,5	47
14	39,8	3,7	49
15	39,0	3,4	41
16	36,4	3,6	36
17	38,0	3,5	39
18	40,5	3,6	47
19	40,8	4,0	40
20	42,0	3,8	50
21	36,0	3,5	35

Окончание таблицы 3

№	Урожайность зерновых, ц с 1 га	Внесение удобрений, ц д. в. на 1 га	Плодородие 1 га пашни, балл
22	39,0	3,5	33
23	42,5	4,0	39
24	44,1	4,2	45
25	46,8	4,8	52
26	39,2	4,1	46

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения об однофакторных эконометрических моделях.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что определяют с помощью корреляционной матрицы?
2. Что подразумевается под выбором формы связи между результативным и факторным показателями?
3. Что определяет коэффициент парной корреляции?
4. Каково назначение коэффициента регрессии?
5. Какая эконометрическая модель называется однофакторной?

Лабораторная работа № 4

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ И ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОФАКТОРНОЙ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками расчета параметров и характеристик многофакторной эконометрической модели.

Теоретические сведения

При наличии нескольких факторов, оказывающих влияние на результативный показатель, для описания зависимости используется линейное многофакторное уравнение регрессии (построить нелинейное нет возможности), которое имеет следующий вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n.$$

Рассчитать параметры эконометрической модели означает определить численные значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, …, a_n. Характеристики эконометрической модели определяют качество построенной модели, т. е. возможность использования ее для целей анализа и прогноза.

Качество уравнения характеризуют следующие показатели:

1) коэффициент множественной корреляции R;
2) коэффициент детерминации R^2;
3) критерий Фишера F;
4) t-критерий Стьюдента.

Методика выполнения работы

Задача. Проверить данные табл. 1 на соответствие требованиям закона нормального распределения, используя методику, изложенную в лабораторной работе № 1. Построить линейную многофакторную модель зависимости урожайности зерновых культур от дозы внесения минеральных удобрений и плодородия пашни, рассчитать ее параметры и характеристики.

Таблица 1

Информация для изучения урожайности зерновых культур

№	Урожайность зерновых, ц с 1 га	Внесение удобрений, ц д. в. на 1 га	Плодородие 1 га пашни, балл
1	38,2	3,0	53
2	39,0	3,4	54
3	43,0	5,0	47
4	49,0	4,7	63
5	42,0	4,6	38
6	46,0	4,8	46
7	45,0	5,5	52
8	42,0	3,3	54
9	42,5	3,7	51
10	44,0	3,9	53
11	45,5	4,1	55
12	43,5	4,0	50
13	45,5	4,5	47
14	39,8	3,7	49
15	39,0	3,4	41
16	36,4	3,6	36
17	38,0	3,5	39
18	40,5	3,6	47
19	40,8	4,0	40
20	42,0	3,8	50
21	36,0	3,5	35
22	39,0	3,5	33

Решение

1. Определить результативный (зависимый) и факторные (независимые) признаки. Они выбираются исходя из цели исследования, как правило на основании логических рассуждений, учитывающих причинно-следственные связи изучаемого явления.

В качестве результативного показателя выбрать урожайность зерновых, а в качестве факторных показателей – внесение удобрений и плодородие пашни.

2. Выбрать лист, содержащий информацию для построения уравнения регрессии.

3. Выполнить команду **Данные → Анализ данных…** Появится соответствующее диалоговое окно.

4. В диалоговом окне **Анализ данных** выбрать инструмент анализа **Регрессия** и нажать на кнопку **ОК**. Появится диалоговое окно, представленное на рис. 1.

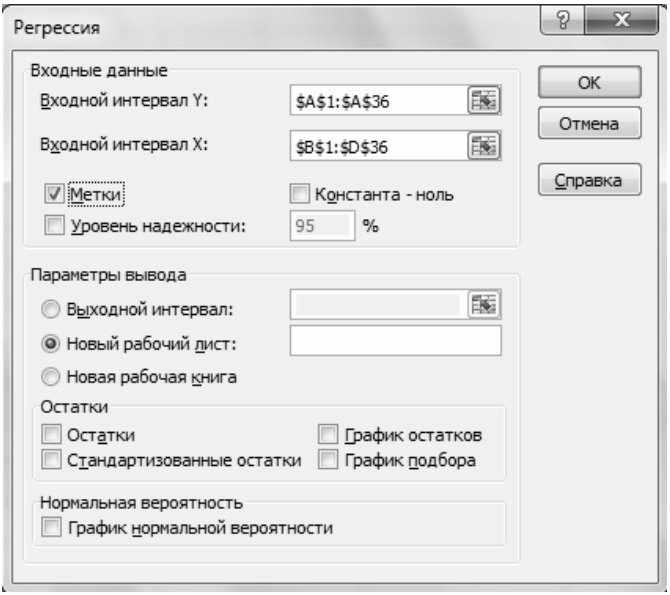


Рис. 1. Диалоговое окно «Регрессия»

5. В поле **Входной интервал *Y*** указать диапазон ячеек, содержащих значения результативного (зависимого) признака.

6. В поле **Входной интервал *X*** указать диапазон ячеек, содержащих значения факторных (независимых) признаков (не более 16).

7. Установить флажок **Метки**, если в первой строке содержатся названия изучаемых признаков.

8. В поле **Новый рабочий лист** ввести имя, соответствующее его содержанию (например, «Регрессия»), и нажать на кнопку **ОК**. В рабочую книгу добавится новый лист, содержащий уравнение регрессии и его характеристики (рис. 2).

9. Отформатировать выведенную информацию (выполнить команду **Формат → Столбец → Автоподбор ширины**).

ВЫВОД ИТОГОВ				
Регрессионная статистика				
Множественный R	0,8926			
R-квадрат	0,7967			
Нормированный R-квадрат	0,7753			
Стандартная ошибка	1,5922			
Наблюдения	22,0000			
Дисперсионный анализ				
	df	*SS*	*MS*	*F*
Регрессия	2,0000	188,7394	94,3697	37,2241
Остаток	19,0000	48,1683	2,5352	
Итого	21,0000	236,9077		
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	17,7953	2,7909	6,3762	0,0000
Переменная X 1	3,2778	0,5578	5,8759	0,0000
Переменная X 2	0,2320	0,0460	5,0422	0,0001

Рис. 2. Стандартизированный вывод итогов расчета

10. Сохранить рабочую книгу.

11. Определить качество полученного уравнения регрессии и исключить незначимые факторы.

Построена двухфакторная эконометрическая модель линейного типа

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

где a_0 – свободный член, отражающий влияние на результативный показатель неучтенных факторов;

a_1 и a_2 – коэффициенты регрессии, показывающие, как изменится результативный показатель, если увеличить факторный на единицу.

Полученное уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$y_x = 17,795 + 2,278x_1 + 0,232x_2.$$

Значение a_1, равное 2,277, означает, что если количество внесенных минеральных удобрений увеличить на 1 ц д. в. на 1 га посева зерновых культур, то урожайность этих культур увеличится

на 2,277 ц с 1 га. Увеличение плодородия пашни на 1 балл даст прибавку урожайности зерновых культур 0,239 ц с 1 га (a_2 = 0,239).

Характеристики полученной модели: R = 0,89; R^2 = 0,797; F = 37,2; t_{a_1} = 5,87; t_{a_2} = 5,04.

Задание для самостоятельного выполнения

По данным табл. 2 построить многофакторную эконометрическую модель линейного типа.

Таблица 2

Информация для изучения стоимости полученной товарной продукции

№	Стоимость товарной продукции, тыс. руб.	Среднеспи-сочная чис-ленность работников, чел.	Стоимость основных производст-венных фон-дов, тыс. руб.	Производствен-ные затраты без амортизации, тыс. руб.	Стоимость покупных кормов, тыс. руб.
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	3639	92	34 472	8248	312
2	6447	160	42 430	7922	524
3	9555	170	51 561	15 906	769
4	3067	73	36 180	6104	561
5	7513	212	62 354	18 574	1306
6	14 390	434	75 699	30 465	1850
7	6583	135	46 898	11 609	1125
8	4059	77	21 195	9159	506
9	7706	119	68 315	20 383	1195
10	3368	73	38 671	7094	481
11	3910	85	32 070	8466	0
12	8745	222	56 441	12 213	505
13	8756	124	61 388	21 257	1785
14	3768	73	42 937	7991	657
15	6713	185	40 891	10 855	1016
16	6748	157	57 275	11 152	564
17	8555	203	68 865	14 568	691
18	11 288	388	49 042	18 223	235
19	3025	94	25 916	5849	166

Окончание таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
20	26 913	406	127 795	38 017	2170
21	2956	72	23 302	6381	93
22	3623	82	33 124	7228	510
23	5402	130	48 898	6647	228
24	2729	89	29 479	8138	348
25	4059	84	36 442	8389	540
26	9333	211	79 372	18 786	1905
27	4920	159	30 791	9036	297
28	5090	223	41 979	12 932	615
29	15 646	342	72 060	24 356	3710
30	9902	244	73 037	19 484	784

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о параметрах и характеристиках эконометрических моделей.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какая модель называется многофакторной?
2. Перечислите параметры эконометрической модели.
3. Что показывает свободный член эконометрической модели?
4. Каково назначение коэффициентов регрессии?
5. Назовите основные критерии оценки качества эконометрической модели.

Лабораторная работа № 5

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА МНОГОФАКТОРНОЙ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОСТРОЕНИЕ ПРОГНОЗА

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками оценки качества многофакторной эконометрической модели.

Теоретические сведения

Качество уравнения регрессии характеризуют следующие показатели:

1. *Коэффициент парной корреляции* r – для однофакторных линейных моделей; *коэффициент множественной корреляции* R – для многофакторных линейных моделей; *корреляционное отношение* η – для нелинейных моделей.

Данные показатели изменяются в диапазонах $-1 \le r \le 1$ и $0 \le R\,(\eta) \le 1$ и показывают силу влияния учтенных в уравнении факторных признаков на результативный. Чем ближе показатель к 1 (или –1), тем связь сильнее. Коэффициент парной корреляции показывает, кроме того, направление связи (знак «плюс» говорит о прямой связи, «минус» – об обратной).

2. *Коэффициент детерминации* r^2, R^2, η^2, выраженный в процентах, показывает, на сколько процентов учтенные в уравнении регрессии факторные признаки объясняют вариацию (влияние) результативного показателя.

3. *Критерий Фишера* F дает общую оценку адекватности (правдивости) уравнения. Полученное значение критерия $F_{расч}$ сравнивают с критическим (табличным) $F_{табл}$ для принятого уровня значимости и числа степеней свободы ($\nu_1 = m - 1$, $\nu_2 = n - m$, где n – число наблюдений; m – число факторов уравнения, включая результативный). Если значение окажется больше соответствующего табличного, то данное уравнение статистически значимо, т. е. доля вариации, обусловленная регрессией, намного превышает случайную ошибку.

4. Для проверки значимости (существенности) каждого коэффициента регрессии служит *t-критерий Стьюдента*. Расчетные значения

данного показателя сравнивают с критическими, которые определяют с учетом принятого уровня значимости α (0,10; 0,05 или 0,01). При изучении социально-экономических явлений достаточным считается уровень значимости, равный 0,05, и числа степеней свободы $\nu = n - m - 1$. Параметр признается значимым, если $t_{расч} \geq t_{табл}$. В учебных целях следует принять значение $t_{табл} = 1{,}96$.

Из уравнения исключают тот фактор, коэффициент при котором незначим и имеет наименьшее значение t-критерия. Уравнение регрессии строят без исключенного фактора, снова проверяют значимость коэффициентов регрессии. Процесс длится до тех пор, пока все коэффициенты регрессии не окажутся значимыми, что свидетельствует о наличии в уравнении только существенных факторов, действительно влияющих на результативный показатель.

В некоторых случаях $t_{расч}$ близок к $t_{табл}$, поэтому с точки зрения содержательности уравнения этот фактор можно оставить для последующей проверки его значимости.

Поскольку факторные признаки часто выражены в разных единицах измерения, коэффициенты регрессии не позволяют сравнить силу их воздействия на результативный признак. Возникает необходимость рассчитать коэффициенты эластичности и β-коэффициенты.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов относительно среднего значения изменится результативный признак, если соответствующий факторный увеличится на один процент относительно своего среднего значения. Он рассчитывается по формуле

$$Э_{x_j} = a_j \frac{\overline{x_j}}{\overline{y}},$$

где $\overline{x_j}$ – среднее значение j-го факторного признака;

$\overline{y}$ – среднее значение результативного признака;

a_j – коэффициент регрессии при j-м факторном признаке.

Недостаток данного показателя связан с тем, что факторные признаки изменяются в разных пределах. В частности, цена реализации при среднем значении 27,8 усл. д. ед. изменяется в пределах от 19,5 до 35,9 усл. д. ед., т. е. в интервале от –30 до +30 % (см. лабораторную работу № 1). В то же время затраты по стимулированию

сбыта отклоняются от своего среднего значения более чем в два раза. Поэтому рассчитывается β-*коэффициент*, показывающий, на какую часть стандартного отклонения изменяется зависимая переменная с изменением фактора x_j на величину его стандартного отклонения.

β-коэффициент определяется по формуле

$$\beta_{x_j} = a_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y},$$

где a_j – коэффициент регрессии при j-м факторном признаке;

σ_{x_j} – стандартное (среднее квадратическое) отклонение j-го факторного признака;

σ_y – стандартное (среднее квадратическое) отклонение результативного признака.

Рост цены и затрат по стимулированию сбыта на одно стандартное отклонение ведет к снижению объема продаж на 0,86 и к росту его на 0,68 стандартного отклонения соответственно. Несмотря на то что цена и в этом случае оказывает влияние на объем реализации в большей степени, чем расходы по продвижению товара, разница является не столь существенной, как у коэффициента эластичности.

Методика выполнения работы

Задача. Оценить качество построенной в лабораторной работе № 4 эконометрической модели формирования зависимости урожайности зерновых культур от дозы минеральных удобрений и плодородия пашни. На рабочий лист было выведено уравнение регрессии и его характеристики, отраженные на рис. 2 указанной работы.

Полученное уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$y_x = 17,795 + 2,278x_1 + 0,232x_2.$$

Решение

Оценить качество полученной модели:

R = 0,89 – связь между результативным и факторными показателями в модели сильная;

R^2 = 0,797 – изменение результативного показателя на 79,7 % обусловлено изменением факторных показателей;

F = 37,2 – уравнение статистически значимо и адекватно отражает изучаемый процесс.

Так как полученная модель многофакторная, необходимо оценить существенность каждого из факторов с помощью t-критерия Стьюдента. В результате t_{a_1} = 5,87; t_{a_2} = 5,04. И для первого, и для второго факторного показателя t-критерий больше критического значения, а значит, факторы в эконометрической модели выбраны существенные.

Проведенный анализ показал, что модель может быть использована для целей анализа и прогноза.

Задание для самостоятельного выполнения

Оценить качество многофакторной эконометрической модели линейного типа, построенной в лабораторной работе № 4.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о параметрах и характеристиках эконометрических моделей.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Перечислите характеристики эконометрической модели.
2. Что показывает коэффициент множественной корреляции?
3. Для чего рассчитывают существенность коэффициента регрессии?
4. Что показывает коэффициент детерминации?
5. Как осуществляется проверка эконометрической модели на адекватность?

Лабораторная работа № 6

ПОСТРОЕНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ С КОЛИЧЕСТВЕННЫМИ И КАЧЕСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками построения регрессионных моделей с количественными и качественными переменными.

Теоретические сведения

Зачастую в регрессионных моделях в качестве объясняющих переменных приходится использовать не только количественные, но и качественные (порода скота, квалификация механизатора и т. д.). Эти показатели выражаются словесно. Возникает проблема отражения в модели влияния таких переменных на исследуемую величину.

Обычно влияние качественного фактора представлено в виде фиктивной переменной, которая отражает два противоположных состояния качественного фактора – так называемые качественные показатели *альтернативного типа*. Например, «фактор действует/не действует», «сезон летний/зимний» и т. д. В этом случае фиктивная переменная может выражаться в двоичной форме. Например, $D = 0$, если животное не принадлежит к породному скоту; $D = 1$, если принадлежит.

Если качественный показатель может присутствовать в явлении в большей или в меньшей степени, он называется показателем *нарастающего типа* (квалификация продавца). Перевод таких качественных показателей в количественное выражение весьма сложен и не всегда объективен.

Модели, в которых объясняющие переменные носят как количественный, так и качественный характер, называются *ANCOVA-моделями (моделями ковариационного анализа)*.

Прежде чем строить эконометрическую модель с качественными факторными показателями, осуществляют их перевод в количественное выражение. Методика выполнения работы аналогична методике, изложенной в лабораторной работе № 5.

Методика выполнения работы

Задача. По данным табл. 1 рассчитать линейную многофакторную модель с количественными и качественными переменными, проанализировать полученные результаты.

Таблица 1

Информация для изучения продуктивности коров

№	Среднегодовая продуктивность коров, ц	Расход кормов на голову, ц к. ед.	Обеспеченность кормовых единиц протеином, г	Принадлежность к породному скоту
1	27,0	28,5	80	Да
2	27,1	32,0	95	Нет
3	33,0	39,9	100	Нет
4	38,1	44,0	102	Нет
5	32,3	40,5	85	Нет
6	39,0	45,8	88	Да
7	32,8	37,0	76	Да
8	35,4	39,0	94	Да
9	36,6	40,6	90	Да
10	33,1	36,9	78	Да
11	31,8	39,2	82	Нет
12	29,0	34,0	84	Нет
13	30,6	37,4	81	Нет
14	24,5	29,0	86	Нет
15	28,0	32,8	93	Нет
16	32,0	36,0	102	Да
17	34,8	37,2	101	Да
18	34,9	38,8	99	Да
19	33,0	36,4	86	Да
20	25,5	30,7	80	Да
21	26,2	31,4	92	Нет
22	30,0	35,5	97	Нет
23	31,0	37,8	90	Нет
24	36,8	45,9	81	Нет
25	43,0	49,1	83	Да

Решение

1. Преобразовать таблицу исходных данных: в столбце «Принадлежность к породному скоту» ввести бинарные переменные, ответ «да» обозначить цифрой 1, «нет» – цифрой 0.

2. Используя инструмент **Регрессия** опции **Анализ данных**, указать в поле **Входной интервал *Y*** диапазон ячеек, содержащих значения результативного признака, а в поле **Входной интервал *X*** – диапазон ячеек, содержащих значения факторных признаков.

3. В поле **Новый рабочий лист** ввести имя, соответствующее его содержанию (например, «Регрессия»), и нажать на кнопку **ОК**. В рабочую книгу добавится новый рабочий лист, содержащий уравнение регрессии и его характеристики (рис. 1).

ВЫВОД ИТОГОВ			
Регрессионная статистика			
Множественный R	0,985064919		
R-квадрат	0,970352895		
Нормированный R-квадрат	0,966117594		
Стандартная ошибка	0,836041743		
Наблюдения	25		
Дисперсионный анализ			
	df	*SS*	*MS*
Регрессия	3	480,4217183	160,1405728
Остаток	21	14,67828173	0,698965797
Итого	24	495,1	
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*
Y-пересечение	-3,554181099	2,198088085	-1,61694207
Расход кормов	0,786705482	0,032901246	23,91111491
Обеспеченность КЕ	0,05775492	0,021216576	2,722160256
Принадлежность к породному скоту	2,497126938	0,339078025	7,364461134

Рис. 1. Стандартизированный вывод итогов расчета

Полученное уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$y_x = -3,55 + 0,79x_1 + 0,06x_2 + 2,50x_3.$$

Значение a_1, равное 0,79, означает, что если количество кормов в рационе увеличить на 1 ц к. е., то продуктивность коровы увеличится на 0,79 ц. Увеличение обеспеченности кормовой единицы протеином на один грамм дает прибавку продуктивности 0,06 ц (a_2 = 0,06). Принадлежность животного к породному скоту обеспечивает увеличение продуктивности на 2,5 ц молока в год.

Оценивая качество полученной модели, можно отметить, что связь между результативным и факторными показателями сильная (R = 0,98). Все факторы, включенные в модель, существенные (t_{a_1} = 23,9; t_{a_2} = 2,7; t_{a_3} = 7,4). Проведенный анализ показал, что модель может быть использована для практических целей.

Задание для самостоятельного выполнения

По данным табл. 2 построить многофакторную эконометрическую модель с учетом влияния на результативный показатель качественного фактора.

Таблица 2

Информация для изучения настрига шерсти от овец

№	Настриг шерсти, кг	Живая масса животного, кг	Принадлежность к породному скоту
1	5,3	50,2	Нет
2	6,2	50,3	Да
3	5,0	50,4	Нет
4	5,7	51,0	Нет
5	6,3	51,2	Да
6	5,4	51,4	Нет
7	6,8	51,6	Да
8	7,3	51,9	Да
9	6,6	52,3	Нет
10	6,2	52,4	Нет
11	6,6	62,4	Нет
12	6,3	52,9	Нет
13	6,7	53,0	Нет
14	7,8	53,2	Да
15	6,8	53,5	Да

Окончание таблицы 2

№	Настриг шерсти, кг	Живая масса животного, кг	Принадлежность к породному скоту
16	7,2	53,6	Нет
17	7,7	54,3	Да
18	8,5	54,7	Да
19	7,8	55,2	Да
20	8,4	55,5	Да
21	8,8	56,5	Да

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения об эконометрических моделях с количественными и качественными переменными.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие переменные называют количественными, а какие – качественными?
2. Опишите разновидности качественных переменных.
3. Как перевести качественный показатель альтернативного типа в количественное выражение?
4. Что показывает коэффициент регрессии при качественном факторе?
5. Как называют модели, в которых объясняющие переменные носят как количественный, так и качественный характер?

Лабораторная работа № 7

ПОСТРОЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ НАЛИЧИИ МУЛЬТИКОЛЛИНЕАРНОСТИ

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками определения мультиколлинеарности множественных линейных регрессионных моделей.

Теоретические сведения

Мультиколлинеарность – линейная взаимосвязь нескольких факторных переменных. Она может возникнуть при построении множественных линейных регрессионных моделей. Мультиколлинеарность не позволяет объективно оценить влияние факторных признаков на результативную переменную. Как следствие, коэффициенты регрессии и их статистические оценки не являются надежными. В некоторых случаях возможно даже получение неверного знака у того или иного коэффициента регрессии. Все это снижает качество эконометрической модели в целом.

Если факторные переменные связаны между собой функциональной зависимостью, то говорят о наличии *совершенной мультиколлинеарности*, крайне редко встречающейся на практике. Значительно чаще сталкиваются с *несовершенной мультиколлинеарностью*, когда между факторными переменными существует тесная корреляционная зависимость.

Наличие мультиколлинеарности может быть выявлено на основании нескольких признаков:

1. Коэффициент множественной корреляции R достаточно высок, но отдельные коэффициенты регрессии имеют низкие характеристики.

2. Коэффициент парной корреляции между двумя факторными признаками находится на достаточно высоком уровне.

3. Высоки частные коэффициенты корреляции. Их целесообразно рассчитывать в тех случаях, когда число факторов эконометрической модели больше двух. Частные коэффициенты корреляции характеризуют силу линейной зависимости между двумя признаками

без учета влияния на них других факторов. Например, если в уравнении регрессии используются три независимые (факторные) переменные X_1, X_2 и X_3, то частный коэффициент корреляции между X_1 и X_2 рассчитывается по формуле

$$r_{12/3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}.$$

Чтобы избежать искажения коэффициентов регрессии в корреляционной модели с мультиколлинеарными факторами, используется каскадный корреляционный анализ, механизм выполнения которого рассмотрен ниже на конкретном примере.

Методика выполнения работы

Задача. Имеется информация об уровне рентабельности зерна, урожайности зерновых культур и дозах внесения минеральных удобрений (табл. 1). Требуется рассчитать многофакторную эконометрическую модель и определить мультиколлинеарные факторы.

Таблица 1

Показатели производства и реализации зерна

№	Уровень рентабельности, %	Урожайность зерновых, ц/га	Дозы минеральных удобрений, кг д. в./га
1	25	40	160
2	41	48	192
3	12	24	96
4	52	50	200
5	19	26	104
6	26	38	152
7	18	27	108
8	37	42	168
9	40	51	204
10	24	37	148

Решение

Логический анализ показывает, что на уровень рентабельности оказывают влияние и урожайность, и дозы внесения удобрений.

В будущей эконометрической модели уровень рентабельности будет результативным показателем Y. Соответственно, урожайность зерновых X_1 и доза внесения удобрений X_2 – факторные признаки.

С помощью функции «Регрессия» получено следующее уравнение:

$$Y = -15{,}4 + 0 \cdot X_1 + 0{,}29X_2,\ R = 0{,}93.$$

Согласно уравнению регрессии урожайность зерновых не оказывает абсолютно никакого влияния на уровень рентабельности зерна. Между факторными переменными X_1 и X_2 существует строгая функциональная зависимость: для любого опыта значение фактора X_2 в четыре раза превышает соответствующее значение признака X_1, т. е. $X_2 = 4X_1$. В этом случае коэффициент парной корреляции между факторными признаками r_{12} равен единице.

Частный коэффициент корреляции может значительно отличаться от коэффициента парной корреляции r. Предположим, получены следующие коэффициенты парной корреляции: $r_{12} = 0{,}6$; $r_{13} = 0{,}4$; $r_{23} = -0{,}4$.

Частный коэффициент корреляции

$$r_{12/3} = \frac{0,6 - 0,4(-0,4)}{\sqrt{(1-0,4^2)(1-(-0,4)^2)}} = 0,905.$$

Полученное значение коэффициента $r_{12/3} = 0{,}905$ указывает на высокую зависимость (иначе говоря, коллинеарность) между переменными X_1 и X_2. Вместе с тем обычный коэффициент парной корреляции $r_{12} = 0{,}6$, что свидетельствует лишь о средней силе связи между изучаемыми факторами.

Наиболее простой способ устранения мультиколлинеарности состоит в исключении из эконометрической модели одной или нескольких факторных переменных, которые тесно коррелируют между собой. Однако при использовании данного метода необходима определенная осторожность: удаление факторных переменных может привести к получению необоснованных выводов. При разработке эконометрических моделей не следует исключать независимые переменные до тех пор, пока тесная связь между ними не станет серьезной проблемой.

Иногда для уменьшения мультиколлинеарности необходимо увеличить объем исходной информации или сформировать новую

базу данных. Однако такой метод часто связан с большими затратами времени и средств, поэтому на практике применяется редко.

В некоторых случаях проблема мультиколлинеарности может быть успешно решена на основе изменения спецификации модели.

Механизм выполнения *каскадного корреляционного анализа*:

1. Выбрать результативный и факторные показатели и проверить информацию столбцов на достоверность.

2. Определить пары тесно связанных (коррелируемых) факторов. Например, в корреляционной модели формирования стоимости валовой продукции такой парой факторов являются основные производственные и оборотные фонды.

3. Определить, какие из факторов тесно связанных пар являются ведущими (определяющими) – промежуточными результативными.

4. Построить парную корреляционную модель взаимосвязи каждой пары факторов, например $y_{x_2} = a_0 + a_1x_1$, где y_{x_2} – стоимость оборотных фондов; x_1 – стоимость основных производственных фондов. Рассчитать все остальные характеристики (r, t_r, t_{aj}).

5. Рассчитать разность фактических и расчетных значений фактора, тесно связанного с другим (другими):

$$x_2 - y_{x_2} = \Delta x_2.$$

В корреляционной модели вместо фактора x_2 разместить столбец Δx_2, определяющий величину отклонения фактического значения фактора от среднего уровня, и рассчитать параметры модели. В этом случае коэффициент регрессии при Δx_2 определяет влияние на результативный показатель нового фактора при его отклонении от среднего уровня. Таким образом удается избежать искажения, которое имеет место в корреляционной модели с тесно коррелируемыми факторами.

Задание для самостоятельного выполнения

По данным табл. 2 рассчитать многофакторную эконометрическую модель, построить корреляционную матрицу и определить мультиколлинеарные факторы. Используя каскадный регрессионный анализ, провести уточнение модели и оценить полученное решение.

Таблица 2

Основные производственные показатели молочного скотоводства в разрезе областей Республики Беларусь

Рай-он	Коли-чество произве-денного молока, тыс. т	Себестои-мость молока – всего, тыс. усл. д. ед.	Прямые затраты труда, тыс. чел.-ч	Оплата труда с начис-лениями – всего, тыс. усл. д. ед.	Средне-годовой удой, кг/гол.	Пого-ловье коров, тыс. гол.	Расход кормов – всего, тыс. т к. ед.	Расход концен-тратов, тыс. т к. ед.	Стои-мость кормов – всего, тыс. усл. д. ед.	Расход покуп-ных кормов, тыс. т к. ед.	Стои-мость покупных кормов, тыс. усл. д. ед.	Площадь сельско-хозяйст-венных угодий, тыс. га
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
Брестская область												
1	89,9	18 559	2423	4152	4581	20,8	116,78	28,59	9975	33,26	3958	78,1
2	66,0	13 704	1752	2993	5290	13,1	78,14	21,19	8693	21,98	3982	40,2
3	91,7	18 017	2054	4598	6342	14,8	111,42	28,98	7942	31,27	4785	44,5
4	24,1	5634	1027	1142	4064	6,7	29,11	7,33	2342	7,40	1622	25,2
5	70,3	15 339	2636	3626	4396	17,5	81,97	19,82	8272	20,32	3592	48,1
6	52,4	10 578	1185	2426	5730	9,9	58,53	15,41	7467	19,91	3470	31,1
7	87,7	17 000	2717	4229	5702	17,5	90,77	24,91	8058	24,29	5334	52,3
8	81,2	17 259	2249	4276	4647	18,2	89,64	27,93	9623	29,15	3838	48,8
9	96,4	19 750	2404	4984	5073	20,2	122,52	32,10	11 309	26,22	4070	63,0
10	88,7	18 407	2797	4032	4557	21,2	85,42	27,85	9895	29,63	3862	65,1
11	56,4	13 869	1784	2530	3955	16,1	60,74	16,69	8132	19,85	2929	49,0
12	51,6	10 695	1136	2383	4911	11,0	59,24	18,01	6053	12,44	2210	36,9
13	60,9	12 864	1761	2856	5430	11,9	58,28	18,27	7612	21,01	3506	29,8
14	99,1	23 335	2911	4517	4437	24,4	129,13	33,99	11 174	31,41	4612	76,7
15	151,8	31 993	5325	7666	4755	33,9	177,30	45,39	19 119	47,82	9596	76,2
16	79,6	18 982	2075	3733	4307	20,5	96,24	26,43	8794	21,09	5099	52,3
Витебская область												
1	25,2	5879	692	1309	4500	6,2	24,14	7,94	3661	6,75	1599	30,2
2	40,1	10 048	1466	2112	3483	11,9	47,24	12,31	4545	11,43	1842	44,0
3	58,8	12 117	1727	3075	5456	10,8	58,62	20,46	7088	17,35	3830	44,4

Продолжение таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
4	57,8	12 570	1830	3030	4175	14,5	59,25	16,94	8042	16,47	3890	55,6
5	60,9	13 690	1875	2900	4240	15,1	60,53	18,76	6049	22,11	3054	43,0
6	26,7	6421	1079	1268	3721	7,2	25,55	9,08	2793	9,40	1412	35,7
7	40,1	10 067	1428	1934	3732	11,4	46,84	11,43	5176	10,27	2516	40,3
8	33,8	7407	1305	1630	4074	8,8	37,04	10,88	3576	9,80	1447	48,8
9	27,6	5651	953	1443	4652	6,3	33,34	8,67	2738	7,76	1212	25,4
10	36,3	8230	1141	1768	4396	8,3	42,58	12,71	4141	9,00	1920	32,8
11	41,7	10 169	1143	1916	3803	11,0	47,70	13,22	4947	9,92	2066	43,2
12	59,6	12 704	1847	3010	4851	12,1	61,75	20,20	7936	17,16	2881	63,6
13	48,8	10 332	1389	2353	4703	10,0	51,00	13,96	6790	11,37	2470	34,3
14	49,7	12 185	2124	2283	3580	13,7	55,76	16,20	7184	15,26	2903	50,6
15	13,4	3247	598	688	3651	3,7	12,84	4,26	1508	4,54	783	12,6
16	39,5	9723	1685	1971	3752	10,9	50,64	13,35	5866	10,11	1763	48,1
17	45,7	10 339	1201	2330	4348	10,8	52,33	14,67	5005	15,63	2215	53,8
18	15,9	3978	699	826	3071	5,2	20,53	4,55	1730	3,85	1055	23,6
19	38,5	9218	1451	1783	4115	9,5	41,54	11,24	3450	12,94	1699	31,7
20	36,7	7986	1165	1690	4110	8,9	35,20	11,93	4952	10,83	2236	41,3
21	29,1	7034	839	1421	3600	8,3	29,13	9,81	3787	10,39	1826	30,0
Гомельская область												
1	22,6	5587	1013	1182	3940	8,4	21,85	7,07	3009	7,37	1309	40,8
2	55,9	13 297	1685	2903	4120	13,7	61,10	16,38	7691	13,02	3634	69,6
3	31,4	7386	1246	1431	4192	8,2	32,09	10,27	2859	8,01	1379	36,4
4	71,0	13 848	1651	3287	5567	13,6	92,51	23,57	9607	17,11	3551	54,0
5	56,3	11 616	1150	2816	5367	11,5	67,22	15,88	8063	15,09	3735	57,7
6	30,7	7442	990	1466	3785	8,6	36,72	9,70	3476	10,50	1746	28,7
7	33,1	7369	1163	1580	4170	8,4	35,28	10,79	4137	11,55	1866	36,5
8	65,6	15 541	1825	3494	4419	15,0	79,31	20,60	6075	15,09	3053	66,1

Продолжение таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
9	58,7	12 808	1509	3056	4263	14,3	59,58	17,61	7217	20,02	2795	68,8
10	23,1	5071	738	1136	4085	6,2	28,88	7,99	2405	5,71	1399	35,6
11	25,6	6412	732	1198	3757	7,3	24,40	8,81	2939	6,37	1535	28,2
12	24,1	5935	801	1179	3705	7,2	25,06	7,42	2524	8,44	1422	28,0
13	36,3	7681	842	2068	5490	7,0	45,30	10,67	5103	8,75	2077	26,8
14	8,1	1835	334	372	4130	2,4	9,91	2,58	1007	2,40	423	16,3
15	29,5	7219	1185	1394	3807	8,1	29,62	8,41	3606	8,32	1539	30,1
16	40,5	9804	1564	1933	3762	11,8	44,39	12,76	4061	14,90	2516	54,1
17	81,4	17 292	1756	4609	4953	17,0	81,56	26,86	9618	25,15	5028	69,7
18	79,1	16 955	2485	3966	4792	16,8	77,44	22,39	11 424	20,17	4241	75,5
19	46,8	9678	1523	2509	5046	9,8	44,97	13,67	5872	16,10	2711	39,7
20	25,5	6274	1067	1245	3740	7,6	31,16	8,52	3117	6,50	1386	32,7
21	25,0	5500	908	1155	4485	5,9	25,60	8,30	2945	7,43	1253	29,8
Гродненская область												
1	59,9	11 352	1249	2723	6872	9,1	61,58	20,25	8248	15,15	2996	32,3
2	68,2	14 431	1562	3829	5184	13,4	89,41	21,89	9252	16,16	3681	54,5
3	63,8	13 171	1884	3260	5206	12,8	70,63	19,14	7270	21,63	3375	48,8
4	133,5	24 981	2383	6213	6799	20,1	134,03	40,18	16 222	36,18	6694	72,2
5	49,4	11 425	1804	2370	4404	12,0	55,23	14,82	4604	15,66	2755	38,2
6	44,0	9680	1592	2016	4352	10,6	49,98	13,02	4185	12,14	2016	39,7
7	34,7	7921	939	1727	4036	8,9	41,43	10,65	4916	8,81	1690	34,7
8	62,3	12 584	1698	2952	5679	11,4	70,40	20,56	7294	14,89	3146	43,1
9	54,3	12 909	1835	2762	4323	12,9	64,62	17,76	6077	19,93	3276	45,3
10	54,5	10 662	1508	2504	5651	10,9	62,02	17,66	6603	17,88	2347	40,6
11	57,2	13 201	1701	2841	4289	13,7	68,18	18,59	7739	17,90	2347	40,9
12	46,0	9468	1381	2207	5357	8,7	52,12	14,08	6671	16,56	3129	34,0
13	36,1	7639	982	1671	4588	8,0	44,26	12,17	3430	12,02	1581	37,3

Окончание таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
14	38,9	8058	1066	1941	4838	8,6	42,91	11,55	5361	9,88	1918	36,1
15	62,4	12 784	1764	2979	5333	12,0	75,44	19,97	8742	18,35	3346	48,6
16	48,7	10 001	1398	2459	5416	9,6	51,09	14,17	6058	11,79	2062	36,1
17	76,6	16 383	1821	3979	5098	15,9	78,13	24,74	8756	21,75	4952	55,4
Минская область												
1	39,3	9192	1104	2008	4147	10,3	43,35	13,76	4460	14,62	2564	43,8
2	63,3	13 409	1853	2984	4719	14,0	71,21	17,79	7836	19,43	3880	55,3
3	56,1	13 263	1751	2846	4127	14,5	67,66	19,24	7268	17,84	2772	52,5
4	45,1	11 009	1872	2294	3899	12,6	57,73	13,26	5302	10,37	2234	55,6
5	78,5	15 885	2082	4680	6493	13,0	100,79	24,81	10 753	24,18	4143	72,8
6	76,5	14 921	1411	3634	6368	12,4	81,86	25,40	10 222	25,17	3863	40,2
7	91,6	19 206	2194	4263	4528	21,0	117,98	26,75	8702	25,65	3934	76,3
8	34,3	8434	1456	1740	3911	9,7	40,75	9,98	3345	8,51	1934	46,6
9	49,0	10 086	1457	2521	4590	11,3	55,66	16,81	6859	16,46	2292	47,8
10	74,5	15 800	2227	3869	4702	16,8	77,18	23,02	10 411	21,23	4084	62,6
11	101,8	19 538	1991	5837	5706	17,4	113,10	28,91	15 337	31,56	6447	63,3
12	56,3	11 764	1590	2559	4535	13,4	62,89	17,73	5761	17,79	3728	41,5
13	31,5	7840	1149	1440	3721	9,8	31,66	9,83	4304	7,81	2018	35,5
14	106,8	20 472	1918	5445	6929	15,5	107,55	30,87	12 606	35,56	5060	46,9
15	65,6	14 644	2476	3439	4053	17,4	82,26	19,42	6696	24,60	4383	66,2
16	145,1	29 554	3924	7536	6314	24,7	160,48	41,64	13 750	35,55	6092	91,6
17	70,8	13 291	1296	4110	6593	10,9	88,92	22,23	9163	18,05	4323	46,0
18	88,5	19 076	3044	6677	4850	19,6	99,21	30,44	11 454	25,31	5425	79,1
19	58,1	11 869	1878	2969	4687	13,0	75,88	19,58	5067	18,48	2495	36,1
20	78,2	16 256	1818	3855	5427	15,4	90,95	25,49	9999	23,23	3518	51,3
21	45,1	9316	1591	2131	4925	9,9	47,49	14,75	5042	13,12	2516	35,9
22	53,6	12 171	1669	2462	4024	14,0	59,98	18,33	6153	13,02	3658	54,1

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о мультиколлинеарности и методах ее определения.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Как мультиколлинеарность влияет на оценки параметров уравнения регрессии?
2. Каковы последствия мультиколлинеарности?
3. Назовите методы борьбы с мультиколлинеарностью.
4. Каковы причины возникновения мультиколлинеарности?
5. Какими способами можно обнаружить мультиколлинеарность?

Лабораторная работа № 8

ПОСТРОЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ НАЛИЧИИ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТИ

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками расчета и устранения последствий гетероскедастичности многофакторной эконометрической модели.

Теоретические сведения

При построении эконометрических моделей часто сталкиваются с таким явлением, как гетероскедастичность, т. е. непостоянством отклонений фактических значений от расчетных (непостоянством дисперсий отклонений). Разберем сущность данного явления на конкретных примерах.

Исходя из фактической информации строится поле корреляции и график эконометрической модели (рис. 1).

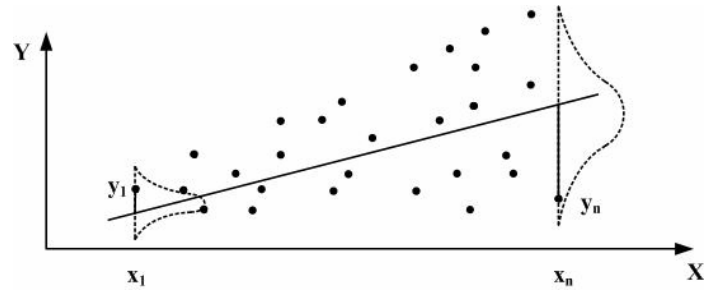


Рис. 1. Пример графического изображения поля корреляции и графика эконометрической модели при наличии гетероскедастичности

Точки корреляционного поля расположены по обе стороны от расчетного уравнения регрессии. При этом абсолютные величины отклонений фактических значений результативного показателя от его расчетных значений нельзя считать постоянными. При небольших дозах минеральных удобрений изучаемые отклонения являются относительно небольшими (хотя и разными по модулю). Однако по мере роста значения факторного признака наблюдается увеличение размаха отклонения фактической урожайности от расчетной.

Гетероскедастичность может проявляться в самых различных формах (выше рассмотрен лишь один из множества возможных вариантов). Отсутствие гетероскедастичности свидетельствует о наличии гомоскедастичности.

Если отклонения фактических значений результативного показателя от линии уравнения регрессии находятся в определенных границах, то говорят об отсутствии гетероскедастичности. Каждое конкретное отклонение может быть большим или меньшим, положительным или отрицательным, но все отклонения заключены в некоторый неширокий «коридор».

Гетероскедастичность может привести ко многим негативным последствиям. В частности, выводы, сделанные на основе характеристик эконометрических моделей, будут необъективными. Как следствие, анализ и прогноз развития экономической системы дадут искаженные результаты.

Данную проблему приходится решать после построения эконометрической модели. Наилучшие результаты дает графический анализ отклонений и тест ранговой корреляции Спирмена.

Методика выполнения

Задача. Построить эконометрическую модель линейного типа, проверить ее на наличие гетероскедастичности и при необходимости преобразовать с целью устранения данного недостатка.

Решение

С целью изучения влияния минеральных удобрений на урожайность зерновых культур была собрана соответствующая информация по предприятиям региона (табл. 1).

Таблица 1

Дозы минеральных удобрений и урожайность зерновых культур

№	Доза удобрений, кг д. в./га	Урожайность зерновых, ц/га	№	Доза удобрений, кг д. в./га	Урожайность зерновых, ц/га
1	55	32	14	84	34
2	110	65	15	115	61
3	58	37	16	87	45
4	103	36	17	93	52

Окончание таблицы 1

№	Доза удобрений, кг д. в./га	Урожайность зерновых, ц/га	№	Доза удобрений, кг д. в./га	Урожайность зерновых, ц/га
5	100	52	18	105	34
6	77	42	19	125	38
7	95	33	20	122	67
8	54	25	21	109	45
9	75	28	22	118	43
10	119	40	23	130	40
11	103	59	24	127	70
12	62	33	25	88	32
13	65	32			

В результате расчетов получена линейная эконометрическая модель вида:

$$Y_x = 12{,}0 + 0{,}33X,$$

где X – доза минеральных удобрений, кг действующего вещества на 1 га;

Y_x – ожидаемая урожайность зерновых культур, ц/га.

Данное уравнение регрессии не отличается высоким качеством (коэффициент парной корреляции $r = 0{,}61$).

Графический анализ отклонений позволяет наглядно отразить наличие гетероскедастичности. При использовании этого теста необходимо предварительно найти отклонение фактических значений результативного показателя от его расчетных значений, а затем возвести полученные разности в квадрат:

$$e_i^2 = (y_i - \tilde{y}_i)^2,$$

где y_i и $\tilde{y}_i$ – фактическое и расчетное значения результативного показателя соответственно.

После этого по оси абсцисс откладываются значения факторной переменной X, а по оси ординат – квадраты отклонений e_i^2. Если последние возрастают по мере увеличения значений факторного признака X_i, то это свидетельствует о высокой вероятности наличия гетероскедастичности.

Графический анализ отклонений удобен и достаточно эффективен в случае парной регрессии. Если проводится множественный регрессионный анализ, необходимо построить соответствующие графики для каждой из независимых переменных. Однако рассмотрение нескольких графиков требует больших затрат времени. Вместо независимых переменных по оси абсцисс целесообразнее отложить расчетные значения результативного показателя. Тем самым можно определить наличие или отсутствие гетероскедастичности на основании одного графика (даже если рассматривается многофакторная эконометрическая модель).

При использовании *теста ранговой корреляции Спирмена* предполагается, что величина отклонения e_i будет либо повышаться, либо уменьшаться по мере увеличения значений факторной переменной. Эта закономерность позволяет сделать вывод, что абсолютные величины отклонений e_i и значения факторного признака x_i будут коррелированны, т. е. взаимосвязаны. Для оценки силы связи следует рассчитать коэффициент ранговой корреляции Спирмена

$$r_{x,\,e} = 1 - 6\frac{\sum d_i^2}{n(n^2-1)},$$

где d_i – разность между рангами x_i и e_i;

n – число опытов.

Рассмотрим фрагмент таблицы, в которой рассчитываются значения d_i (табл. 2).

Таблица 2

Расчет разности между рангами

№	x_i	y_i	$\tilde{y}_i$	$\lvert e_i \rvert$	Ранг		d_i^2
					x_i	$\lvert e_i \rvert$	
1	55	32	30,2	1,8	2	3	1
2	110	65	48,3	16,7	18	25	49
3	58	37	31,1	5,9	3	9	36
4	103	36	46,0	10,0	14,5	15	0,25
…							
25	88	32	41,0	9,0	10	13	9
Итого							548,5

Для определения рангов по факторному показателю необходимо расположить все значения соответствующего столбца в порядке возрастания. Например, значение первого опыта $x_1 = 55$ находится в ранжированном ряду на втором месте (после числа 54). Следовательно, ранг первого значения факторного признака равен двум. Аналогично рассчитываются ранги для столбца отклонений. Иногда в ранжированном ряду встречаются одинаковые числа. В этом случае рассчитывается средний ранг. Например, два числа 103 (показатель X) расположены на четырнадцатом и пятнадцатом местах, поэтому ранг этих значений будет равен 14,5.

После определения суммы последнего столбца табл. 2 вычисляется коэффициент ранговой корреляции Спирмена

$$r_{x,\,e} = 1 - 6\frac{548,5}{25(625-1)} = 0,79.$$

Полученное значение превышает 0,7, поэтому можно сделать вывод о наличии в рассматриваемом примере гетероскедастичности.

При обнаружении гетероскедастичности возникает необходимость преобразовать эконометрическую модель с целью устранения данного недостатка. Для смягчения гетероскедастичности часто применяется метод взвешенных наименьших квадратов. В этом случае для каждого опыта, наблюдения необходимо знать отклонение фактических значений результативного показателя от его расчетных значений. Обозначим данное отклонение через $\sigma_i = |e_i|$.

Метод взвешенных наименьших квадратов состоит из двух этапов. На первом этапе все значения результативного и факторного показателей делят на соответствующую величину σ_i $\left(\tilde{y}_i = \frac{y_i}{\sigma_i};\ \tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sigma_i}\right)$. Кроме того, для каждого опыта необходимо найти значения $\frac{1}{\sigma_i} = \tilde{z}_i$.

Результаты расчетов, характерные для первого этапа, приведены в табл. 3.

Преобразования позволяют уменьшить значимость опытов, характеризующихся большими отклонениями расчетных значений от фактических. Напротив, если абсолютная разность между фактическим и расчетным значениями результативного показателя относительно невелика, то соответствующий опыт более значим.

Таблица 3

Преобразование исходных данных в целях уменьшения гетероскедастичности

№	x_i	y_i	σ_i	$\tilde{z}_i$	$\tilde{x}_i$	$\tilde{y}_i$
1	55	32	1,8	0,556	30,56	17,78
2	110	65	16,7	0,060	6,59	3,89
3	58	37	5,9	0,169	9,83	6,27
4	103	36	10,0	0,100	10,30	3,60
…						
25	88	32	9,0	0,111	9,78	3,56

На втором этапе с помощью программы «Регрессия» определяют параметры двухфакторной модели вида:

$$\tilde{y} = \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{Z} + \alpha_2 \tilde{X}.$$

В результате вычислений получена следующая эконометрическая модель:

$$\tilde{y} = 0,008 + 15,97\tilde{Z} + 0,27\tilde{X}.$$

Для нового уравнения регрессии коэффициент корреляции R почти равен единице. При использовании рассмотренной выше методики свободный член эконометрической модели всегда практически равен нулю. Таким образом, для устранения гетероскедастичности вместо линейного однофакторного уравнения регрессии рассчитаны параметры двухфакторной эконометрической модели без свободного члена. При факторной переменной коэффициент регрессии снизился с 0,33 до 0,27, т. к. была уменьшена значимость опытов с высокими отклонениями e_i.

Задание для самостоятельного выполнения

По данным табл. 4 построить эконометрическую модель линейного типа, проверить ее на наличие гетероскедастичности и при необходимости преобразовать с целью устранения данного недостатка.

Таблица 4

Дозы минеральных удобрений и урожайность бобовых культур

№	Доза NPK, кг д. в./га	Урожайность бобовых, ц/га	№	Доза NPK, кг д. в./га	Урожайность бобовых, ц/га
1	57	36	14	86	38
2	112	69	15	117	65
3	61	43	16	90	51
4	106	42	17	96	58
5	104	60	18	109	42
6	82	52	19	130	48
7	97	37	20	124	71
8	56	29	21	111	49
9	78	34	22	121	49
10	122	46	23	133	46
11	107	67	24	131	78
12	67	43	25	93	42
13	70	42	26	95	46

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения об эконометрических моделях при наличии гетероскедастичности.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение гетероскедастичности наблюдений.
2. Каковы последствия гетероскедастичности?
3. Как применяется тест ранговой корреляции Спирмена для обнаружения гетероскедастичности?
4. Каковы последствия гетероскедастичности в случае использования МНК для построения модели?
5. Назовите подходы к устранению гетероскедастичности, основанные на преобразовании исходных данных.

Лабораторная работа № 9

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕНДОВЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками расчета параметров и характеристик трендовых эконометрических моделей.

Теоретические сведения

Методы исследования моделей, основанных на данных пространственных выборок и временных рядов, существенно отличаются. Объясняется это тем, что, в отличие от пространственных выборок, наблюдения во временных рядах, как правило, нельзя считать независимыми.

Под *временным рядом* (динамическим рядом, или рядом динамики) в экономике подразумевается последовательность наблюдений некоторого признака (случайной величины) Y в последовательные моменты времени. Отдельные наблюдения называются уровнями ряда y_t ($t = 1, 2, ..., n$), где n – число уровней.

Например, в табл. 1 отображен спрос на некоторый товар за 8-летний период (усл. д. ед.), т. е. временной ряд спроса y_t. Временной ряд y_t изображен графически на рис. 1.

Таблица 1

Спрос на товар М за ряд лет

Год, t	1	2	3	4	5	6	7	8
Спрос y_t, усл. д. ед.	213	171	291	309	317	362	351	361

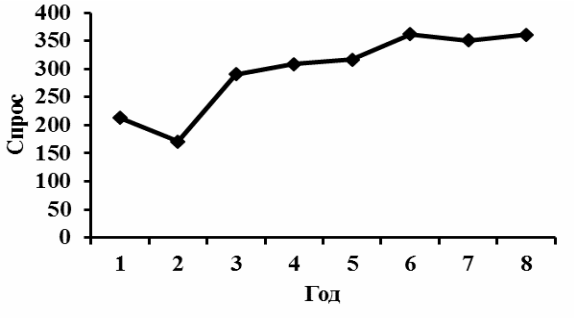


Рис. 1. Динамика изменения спроса за 8 лет

Основные этапы анализа временных рядов:

– графическое представление и описание поведения временного ряда;

– выделение и удаление закономерных (неслучайных) составляющих временного рада (тренда, сезонных и циклических составляющих);

– сглаживание и фильтрация (удаление низко- или высокочастотных составляющих временного ряда);

– исследование случайной составляющей временного ряда, построение и проверка адекватности математической модели для ее описания;

– прогнозирование развития изучаемого процесса на основе имеющегося временного ряда;

– исследование взаимосвязи между различными временными рядами.

Среди наиболее распространенных методов анализа временных рядов – корреляционный анализ, модели авторегрессии и скользящей средней.

В отличие от элементов случайной выборки, члены временного ряда, как правило, не являются статистически независимыми, а также не являются одинаково распределенными.

Одна из важнейших задач анализа временного ряда – прогнозирование на его основе развития изучаемого процесса. При этом исходят из того, что тенденция развития, установленная в прошлом, может быть распространена (экстраполирована) на будущий период. Задача ставится следующим образом: имеется временной (динамический) ряд y_t (t = l, 2, ..., n), требуется сделать прогноз уровня этого ряда на момент ($n + \tau$).

Прогноз развития изучаемого процесса на основе экстраполяции временных рядов может оказаться эффективным, как правило, в рамках краткосрочного, в крайнем случае среднесрочного планирования.

Методика выполнения работы

В случае линейной зависимости между признаками применяется линейная математическая функция

$$y = ax + b.$$

Для построения линейного либо нелинейного однофакторного уравнения регрессии в Excel необходимо выполнить следующие действия:

1. Построить поле корреляции (см. лабораторную работу № 3).

2. Щелкнуть левой кнопкой мыши по любой из точек диаграммы.

3. Выполнить команду **Работа с диаграммами → Макет → Анализ → Линия тренда…** или выбрать в контекстном меню пункт **Добавить линию тренда…** Появится диалоговое окно, представленное на рис. 2.

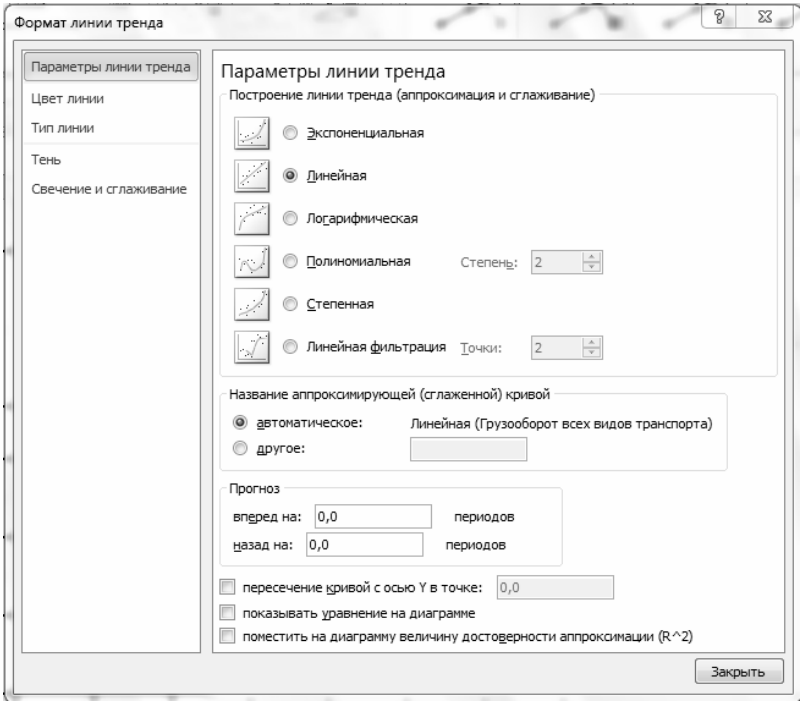


Рис. 2. Диалоговое окно «Формат линии тренда»

4. Выбрать необходимую математическую функцию и щелкнуть по ней левой кнопкой мыши. На диаграмме появится линия тренда.

Могут быть получены различные уравнения регрессии:

– линейное: $y = 25,7x + 181,3$;

– логарифмическое: $y = 89,8\ln(x) + 177,9$;

– степенное: $y = 185x^{0,3345}$;

– экспоненциальное: $y = 188,07e^{0,0949x}$;

– полиномиальное (парабола): $y = -3,3x^2 + 55,1x + 132,3$.

Во всех полученных моделях x – время t, т. е. порядковый номер года: для первого года $t = 1$, для второго $t = 2$ и т. д.

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Построить трендовую модель и изобразить графически динамику изменения грузооборота в Республике Беларусь за период с 2000 по 2016 г. Данные представлены в табл. 2.

Показатели по вариантам:

1) грузооборот всех видов транспорта;
2) трубопроводный транспорт;
3) железнодорожный транспорт;
4) автомобильный транспорт;
5) внутренний водный транспорт;
6) воздушный транспорт.

Таблица 2

Грузооборот по видам транспорта (млн т-км)

Вариант	Год							
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
1	89 154	91 410	97 963	109 510	118 738	127 320	128 494	130 868
2	52 659	56 264	57 040	62 733	69 309	74 261	73 631	70 835
3	31 425	29 727	34 169	38 402	40 331	43 559	45 723	47 933
4	5026	5350	6658	8181	8867	9351	8939	11 941
5	26	41	59	160	182	90	109	93
6	18	28	37	34	49	59	92	66

Окончание таблицы 2

Вариант	Год								
	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
1	130 796	121 172	128 144	134 269	131 684	130 752	131 402	125 957	125 820
2	67 871	64 785	65 743	65 258	61 134	61 220	59 704	60 552	59 345
3	48 994	42 742	46 224	49 406	48 351	43 818	44 997	40 785	41 107
4	13 742	13 512	16 023	19 436	22 031	25 603	26 587	24 523	25 239
5	132	83	110	143	134	84	49	21	21
6	57	50	44	27	34	27	65	77	108

Задание 2. Построить трендовую модель и график изменения поголовья коров в Республике Беларусь за период с 2000 по 2017 г. (табл. 3).

Таблица 3

Поголовье коров (на конец года)

Показатель	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Поголовье коров, тыс. гол.	1845	1784	1716	1658	1613	1565	1506	1459	1452

Окончание таблицы 3

Показатель	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Поголовье коров, тыс. гол.	1445	1478	1477	1521	1525	1533	1512	1502	1500

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о трендовых эконометрических моделях.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Каковы принципы построения трендовой модели?
2. Перечислите виды временных рядов.
3. Чем отличаются временные ряды от пространственных выборок?
4. Какие требования предъявляются к временным рядам как к исходной информации при прогнозировании?
5. Какой метод позволяет определить тренд дисперсии?

Лабораторная работа № 10

ПОСТРОЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С УЧЕТОМ СЕЗОННОЙ КОМПОНЕНТЫ

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками расчета аддитивной модели временного ряда с учетом сезонной компоненты.

Теоретические сведения

Важнейшей классической задачей при исследовании экономических временных рядов является выявление и статистическая оценка основной тенденции развития изучаемого процесса и отклонений от нее.

Спецификация модели временного ряда обычно включает следующие составляющие: тренд (T), сезонная компонента (S), циклическая составляющая, случайная компонента (E), поэтому уровень ряда можно представить как функцию составляющих (компонент): $Y = f(T, S, E)$.

В зависимости от взаимосвязи между составляющими может быть построена либо аддитивная модель $Y = T + S + E$, либо мультипликативная модель $Y = T \cdot S \cdot E$ ряда динамики. Сезонная компонента S описывает регулярные изменения.

Построение аддитивной модели сводится к расчету значений T, S и E для каждого уровня ряда.

Процесс построения аддитивной модели включает в себя следующие шаги:

– выравнивание исходного ряда методом скользящей средней;

– расчет значений сезонной компоненты S;

– устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных ($T + E$);

– аналитическое выравнивание уровней ($T + E$) с использованием полученного уравнения тренда;

– расчет полученных по модели значений ($T + E$);

– расчет абсолютных и/или относительных ошибок. Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, ими можно заменить исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок E для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

Методика выполнения работы

Задача. По данным табл. 1 построить аддитивную модель динамики изменения курса валюты за ряд лет.

Таблица 1

Курс доллара США в Республике Беларусь за 2013–2017 гг.

Год	Кварталы			
	1	2	3	4
2013	–	–	–	0,928
2014	0,969	1,003	1,038	1,079
2015	1,479	1,468	1,639	1,781
2016	2,0755	1,975	1,9682	1,938
2017	1,9132	1,8805	1,94865	–

Решение

Общий вид аддитивной модели:

$$Y = T + S + E.$$

Модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Для расчета компоненты аддитивной модели временного ряда необходимо:

1. Провести выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого:

1.1. Найти скользящие средние (гр. 4 табл. 2). Полученные таким образом выровненные значения уже не содержат сезонной компоненты.

1.2. Привести эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для чего найти средние значения из двух последовательных центрированных скользящих средних (гр. 5 табл. 2).

2. Найти оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними (гр. 6 табл. 2).

Эти оценки необходимо использовать для расчета значений сезонной компоненты S. Для этого нужно найти средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты S_i. В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные

воздействия за период взаимопогашаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю (табл. 3).

Таблица 2

Нахождение оценки сезонной компоненты

Квартал	Квартал п/п (t)	Курс дол. США (Y)	Скользящая средняя	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
IV	1	0,928	–	–	–
I	2	0,969	0,985	–	–
II	3	1,003	1,022	1,003	0,000
III	4	1,038	1,150	1,086	–0,048
IV	5	1,079	1,266	1,208	–0,129
I	6	1,479	1,416	1,341	0,138
II	7	1,468	1,592	1,504	–0,036
III	8	1,639	1,741	1,666	–0,027
IV	9	1,781	1,868	1,804	–0,023
I	10	2,0755	1,950	1,909	0,167
II	11	1,975	1,989	1,970	0,005
III	12	1,9682	1,949	1,969	–0,001
IV	13	1,938	1,925	1,937	0,001
I	14	1,9132	1,920	1,923	–0,009
II	15	1,8805	–	–	–
III	16	1,94865	–	–	–

Таблица 3

Результаты расчета скорректированной сезонной компоненты

Показатель	Квартал			
	I	II	III	IV
Годы:				
2014	–	0,000	–0,048	–0,129
2015	0,138	–0,036	–0,027	–0,023
2016	0,167	0,005	–0,001	0,001
2017	–0,009	–	–	–
Средняя оценка сезонной компоненты	0,098	–0,010	–0,025	–0,050
Скорректированная сезонная компонента S_i	0,095	–0,013	–0,028	–0,053

3. Исключить влияние сезонной компоненты путем вычитания ее значения из каждого уровня исходного временного ряда. Значения величин $T + E = Y - S$ (табл. 4) рассчитываются за каждый момент времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 4

Результаты исключения влияния сезонной компоненты

Квартал t	1	2	3	4	5	6	7	8
$T + E = Y - S$	0,981	0,874	1,016	1066	1,132	1,384	1,481	1,667

Окончание таблицы 4

Квартал t	9	10	11	12	13	14	15	16
$T + E = Y - S$	1,834	1,980	1,988	1,997	1,991	1,818	1,894	1,977

Параметры эконометрического уравнения определяются по методике, изложенной в лабораторной работе № 9. В результате получим:

$$T_i = 1{,}695 + 0{,}007t.$$

4. Определить компоненту T_i данной модели, проведя аналитическое выравнивание ряда ($T + E$) с помощью линейного тренда. Подставив в полученное уравнение значения $t = 1...16$, найти уровни T_i для каждого момента времени (табл. 4).

Таблица 5

Определение трендовой компоненты

Квартал t	1	2	3	4	5	6	7	8
T	1,702	1,709	1,716	1,723	1,730	1,737	1,744	1,751

Окончание таблицы 5

Квартал t	9	10	11	12	13	14	15	16
T	1,758	1,765	1,772	1,779	1,786	1,793	1,800	1,807

5. Найти значения уровней ряда F_t, полученные по аддитивной модели, прибавив к уровням T_i значения сезонной компоненты S_i для соответствующих кварталов (табл. 2).

Например, для $t = 1$ (соответствует IV кварталу 2013 г.) имеем:

$$F_1 = 1{,}702 + (-0{,}053) = 1{,}649.$$

Прогнозирование по аддитивной модели

Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в аддитивной модели – сумма трендовой и сезонной компоненты. Проведем расчет для IV квартала 2017 г. и I квартала 2018 г. (t = 17, t = 18). Для определения трендовой компоненты воспользуемся полученным уравнением тренда $T_i = 1{,}695 + 0{,}007t$. Получим:

$$T_{17} = 1{,}695 + 0{,}007 \cdot 17 = 1{,}814;$$

$$T_{18} = 1{,}695 + 0{,}007 \cdot 18 = 1{,}821.$$

Значение сезонной компоненты за соответствующий период: $S_4 = -0{,}053$; $S_1 = 0{,}095$. Таким образом, прогнозные значения

$$F_{17} = T_{17} + S_4 = 1{,}761;$$

$$F_{18} = T_{18} + S_1 = 1{,}916.$$

Задание для самостоятельного выполнения

По данным табл. 6 построить аддитивную модель динамики изменения дохода компании за ряд лет. Сделать прогноз дохода компании в течение следующего года.

Таблица 6

Динамика изменения дохода компании за ряд лет, млн руб.

Год	Квартал			
	1	2	3	4
2010	581,5	581,7	590,5	620,3
2011	699,0	781,1	891,4	992,9
2012	1110,6	1148,9	1301,3	1440,4
2013	1661,3	1769,7	1850,6	1954,2
2014	2023,4	2079,2	2145,7	2429,6
2015	2115,7	2100,1	2001,1	2307,4
2016	2517,2	2771,6	2777,3	2951,8
2017	2667,2	2903,3	2922,3	3103,6

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о моделях временных рядов.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Влияние каких компонент временного ряда устраняется с помощью скользящих средних?
2. Когда целесообразнее использовать простые скользящие средние, а для каких временных рядов предпочтительнее взвешенные?
3. Когда метод сравнения разностей средних уровней не дает ответа на вопрос о наличии тренда?
4. В чем отличие аддитивной модели от мультипликативной?
5. Охарактеризуйте компоненты временных рядов.

Практическое занятие № 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

***Цель занятия*:** овладеть приемами нахождения оптимального решения задачи линейного программирования симплекс-методом.

Теоретические сведения

Симплексный метод – простой метод рационального перебора угловых точек, в основу которого положена идея последовательного улучшения плана. Алгоритм симплекс-метода нахождения оптимального плана всегда начинается с некоторого допустимого базисного решения. Далее проверяется, можно ли улучшить значение целевой функции, если увеличить одну из небазисных (нулевых) переменных, ввести ее в базис. Если такой переменной нет, то оптимальное решение найдено. Если есть – необходимо перейти к новому, лучшему базисному решению.

Каждый цикл преобразования называют *итерацией*.

Переменную, имеющую наибольшую по абсолютной величине отрицательную оценку, называют перспективной, поскольку введение ее в базис обеспечивает переход к не худшему опорному плану. Столбец, содержащий перспективную переменную, – разрешающий столбец. Симплексные отношения – результат деления свободного члена на соответствующий элемент разрешающего столбца.

Симплексные преобразования:

1. Элементы разрешающей строки новой таблицы получаются делением старых элементов этой строки на разрешающий элемент.

2. Элементы остальных строк разрешающего столбца обнуляются.

3. Все остальные элементы новой симплексной таблицы, включая значения базисных переменных, оценки свободных переменных и значение функционала, вычисляются по правилу прямоугольника (рис. 1). Для этого в исходной таблице выделяется такой прямоугольник, чтобы одна из его диагоналей определялась вычисляемым и разрешающим элементами. Эту диагональ называют главной, а другую – побочной.

Чтобы получить элемент новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной и разделить полученное число на разрешающий элемент.

Прежде чем переходить к следующей итерации, следует для контроля правильности расчетов вычислить оценки. Оптимальный план найден, если все оценки переменных положительны.

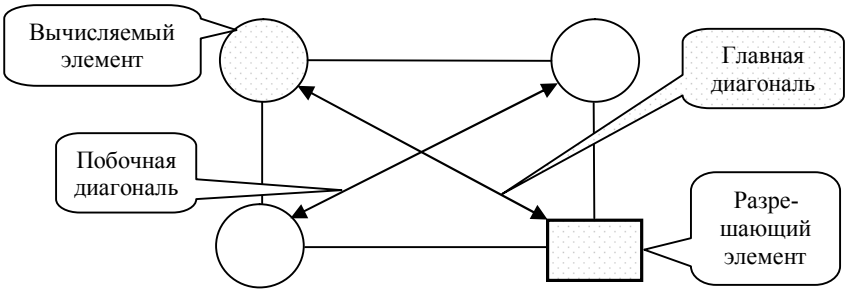


Рис. 1. Обозначения составляющих симплексного преобразования

Методика выполнения работы

Задача. Предприятие производит три вида сельскохозяйственного оборудования. Прибыль от производства каждого вида оборудования – 2, 3 и 8 усл. д. ед. Известны ресурсы материалов, производственного оборудования и труда (110, 110, 100) и коэффициенты расхода каждого ресурса на каждое изделие. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 110, \\ &x_1 + x_2 + 4x_3 \le 110, \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

Определить оптимальный план производства оборудования, используя симплекс-метод.

Решение

1. Преобразовать модель, приведя к канонической форме:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 110, \\ &x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 110, \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 100 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,6}.$$

2. Занести условия задачи в симплексную таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Заполненная симплексная таблица

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
0	x_4	0	110	6	2	5	1	0	0	
	x_5	0	110	1	1	4	0	1	0	
	x_6	0	100	5	3	2	0	0	1	
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			0	–2	–3	–8	0	0	0	

3. Выбрать наибольшую по модулю отрицательную оценку. В данном случае вводиться в базис будет переменная x_3. Соответствующий ей столбец является разрешающим.

4. Рассчитать симплексное отношение (табл. 2).

Таблица 2

Результаты расчета симплексного отношения

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
0	x_4	0	110	6	2	**5**	1	0	0	110 / 5 = 22
	x_5	0	110	1	1	4	0	1	0	110 / 4 = 27,5
	x_6	0	100	5	3	2	0	0	1	100 / 2 = 50
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			0	–2	–3	–8	0	0	0	

5. Выбрать наименьшее симплексное отношение (разрешающую строку). Из базиса выводится переменная x_4. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент.

6. Выполнить симплексные преобразования. Элементы разрешающей строки новой таблицы определяются делением старых элементов этой строки на разрешающий элемент. Элементы других строк разрешающего столбца обнуляются. Все остальные элементы новой симплексной таблицы, включая значения базисных переменных, оценки свободных переменных и значение функционала, вычисляются по правилу прямоугольника (табл. 3). Результаты расчета представлены в табл. 4.

Таблица 3

Результаты расчета по правилу прямоугольника

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
1	x_3	8	22	$^6/_5$	$^2/_5$	1	$^1/_5$	0	0	
	x_5	0	22*			0				
	x_6	0				0				
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
						0				

* Пример расчета значения ячейки: $\dfrac{110 \cdot 5 - 110 \cdot 4}{5} = 22.$

Таблица 4

Результаты расчета 1-й итерации

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
1	x_3	8	22	$^6/_5$	$^2/_5$	1	$^1/_5$	0	0	
	x_5	0	22	$^{-19}/_5$	$^{-3}/_5$	0	$^{-4}/_5$	1	0	
	x_6	0	56	$^{13}/_5$	$^{11}/_5$	0	$^{-2}/_5$	0	1	
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			176	$^{38}/_5$	$^1/_5$	0	$^8/_5$	0	0	

Результаты расчета 1-й итерации показали, что все оценки переменных положительны, а следовательно, оптимальный по прибыли план найден. Целевая функция max$Z$ = 176; x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 22.

Первый ресурс (материалы) использован полностью; 22 единицы второго (производственное оборудование) и 56 единиц третьего (труд) не используются в оптимальном плане. После определения возможности приобретения материалов необходимо решить задачу повторно и проанализировать полученные результаты.

Задание для самостоятельного выполнения

Хлебозавод производит три вида хлебобулочных изделий. Ресурсы муки, труда и оборудования ограничены. Определить оптимальный план производства с помощью симплекс-метода согласно данным своего варианта.

Вариант 1

$$\max Z = 8x_1 + 4x_2 + 3x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 5_2 + 2x_3 \le 180, \\ &x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 120, \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 2

$$\max Z = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &7x_1 + x_2 + 5x_3 \le 110, \\ &x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ &2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 3

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180, \\ &2x_2 + 4x_3 \le 200, \\ &5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 4

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 110, \\ &x_1 + x_2 + 4x_3 \le 110, \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 5

$$\max Z = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 180, \\ &x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ &2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 6

$$\max Z = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &7x_1 + x_2 + 5x_3 \le 180, \\ &x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ &2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 50 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

Контрольные вопросы

1. Как заполнить симплексную таблицу?
2. Как определить разрешающий элемент?
3. Как преобразуются разрешающая строка и разрешающий столбец?
4. В чем состоит правило прямоугольника?
5. Каков признак нахождения оптимального плана?

Лабораторная работа № 11

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В EXCEL

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками работы решения задач линейного программирования с использованием надстройки Excel «Поиск решения».

Методика выполнения работы

Задача. Цех производит три вида колбасной продукции, при изготовлении которой используется три вида ресурсов (табл.).

Таблица

Исходные данные

Вид ресурса	Расход ресурса на единицу продукции			Наличие ресурса
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Труд, чел.-ч	6	2	5	180
Говядина, кг		2	4	60
Свинина, кг	5	2	5	120
Прибыль, усл. д. ед.	9	6	7	

Математическая модель задачи оптимизации производственного плана по величине прибыли имеет вид:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 180, \\ 2x_2 + 4x_3 &\le 60, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 120 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Подготовить задачу для решения и выполнить расчет в Excel.

Решение

1. Оформить данные на листе Excel. Размещение и оформление данных не имеет принципиального значения, однако для лучшего понимания следует придерживаться образца (рис. 1), помещая элементы в указанные ячейки.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Вид ресурса	x1	x2	x3	Расчетное значение	Знак ограничения	Наличие ресурса
2							
3	Труд, чел.-ч	6	2	5		<=	180
4	Говядина, кг		2	4		<=	60
5	Свинина, кг	5	2	5		<=	120
6	Прибыль, усл. д. ед.	9	6	7			

Рис. 1. Оформление данных на листе Excel

2. Для заполнения столбца «Расчетное значение» воспользоваться функцией СУММПРОИЗВ: поставить курсор в ячейку E3, выполнить команду «Вставка функции» и вызвать функцию СУММПРОИЗВ из категории «Математические».

В качестве первого массива следует указать ячейки переменных B2…D2, но, поскольку этот массив будет использоваться и в нижних строках, целесообразно зафиксировать его с помощью клавиши F4. В качестве второго массива указать B3…D3 (рис. 2).

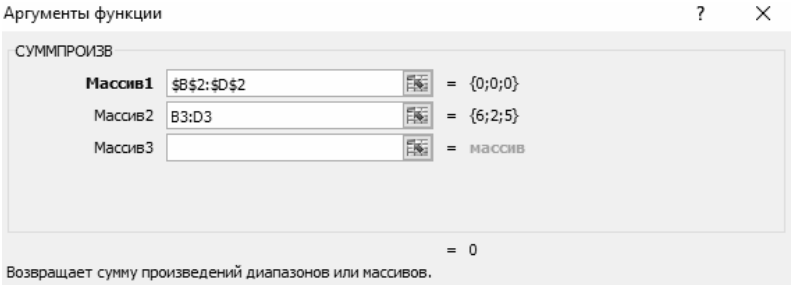


Рис. 2. Вставка функции СУММПРОИЗВ

Затем скопировать команду в остальные строки столбца до ячейки целевой функции включительно (рис. 3).

E6 =СУММПРОИЗВ($B$2:$D$2;B6:D6)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Вид ресурса	x1	x2	x3	Расчетное значение	Знак ограничения	Наличие ресурса
2							
3	Труд, чел.-ч	6	2	5	0	<=	180
4	Говядина, кг		2	4	0	<=	60
5	Свинина, кг	5	2	5	0	<=	120
6	Прибыль, усл. д. ед.	9	6	7	0		

Рис. 3. Подготовленная матрица

3. Вызвать инструмент «Поиск решения»: меню Данные (область Анализ) → Поиск решения (рис. 4).

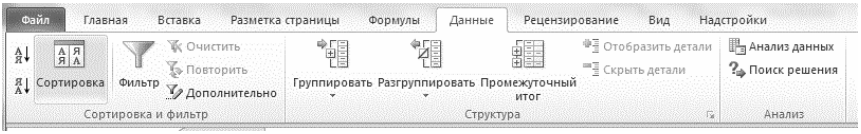


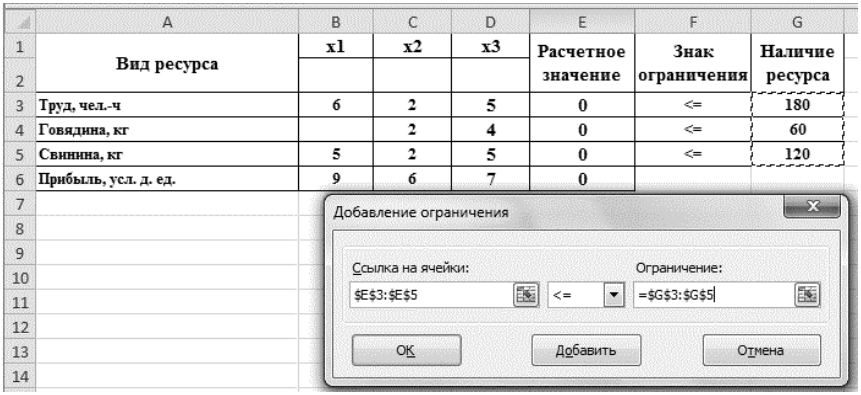
Рис. 4. Вызов инструмента «Поиск решения»

Если «Поиск решения» не подключен, следует выполнить команду меню **Файл → Параметры → Надстройки → Надстройки Excel → Перейти**, поставить «галочку» напротив пункта **Поиск решения** и нажать на кнопку **ОК**. «Поиск решения» подключен и готов к работе.

4. В окне «Оптимизировать целевую функцию» щелчком мыши выбрать ячейку E6. Поскольку требуется определить максимальное значение целевой функции, то параметр «Максимум» оставляют по умолчанию.

5. В окне «Изменяя ячейки переменных» указать ячейки переменных B2…D2.

6. Для работы с ограничениями перейти в поле «В соответствии с ограничениями» и нажать на кнопку «Добавить». Требуется попарно сравнить ячейки E3 и G3, E4 и G4, E5 и G5. Но все эти ограничения имеют одинаковый знак (≤), следовательно, можно сразу записать сравнение двух массивов, выделяя их курсором (рис. 5).



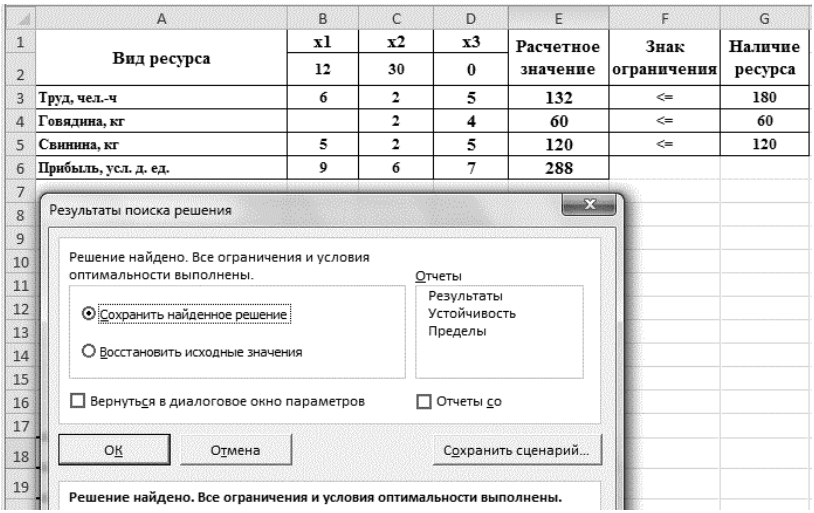
	A	B	C	D	E	F	G
1	Вид ресурса	x1	x2	x3	Расчетное значение	Знак ограничения	Наличие ресурса
2							
3	Труд, чел.-ч	6	2	5	0	<=	180
4	Говядина, кг		2	4	0	<=	60
5	Свинина, кг	5	2	5	0	<=	120
6	Прибыль, усл. д. ед.	9	6	7	0		

Рис. 5. Ввод группы ограничений с одним знаком

Переменные по умолчанию неотрицательны. Снять «галочку» с пункта «Метод решения нелинейных задач методом ОПГ», отметить пункт «Поиск решения линейных задач симплекс-методом» и нажать на кнопку «Найти решение». На мониторе должно появиться сообщение «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». Выбрать отчет «Результаты» и проанализировать информацию на появившемся листе Excel.

Однако если появится сообщение «В ходе поиска не удалось найти допустимого решения» или «Условия для линейной модели не выполняются», это означает, что при выполнении работы была допущена техническая ошибка, которую нужно исправить.

Результат работы представлен на рис. 6. Оптимальным решением будет выпускать 12 т колбасной продукции первого вида и 30 т колбасной продукции второго. Прибыль – 288 усл. д. ед. Ресурсы говядины и свинины будут использованы полностью. Имеется 48 чел.-ч ресурса труда.



Вид ресурса	x1	x2	x3	Расчетное значение	Знак ограничения	Наличие ресурса
	12	30	0			
Труд, чел.-ч	6	2	5	132	<=	180
Говядина, кг		2	4	60	<=	60
Свинина, кг	5	2	5	120	<=	120
Прибыль, усл. д. ед.	9	6	7	288		

Рис. 6. Итоговый рабочий лист

Задание для самостоятельного выполнения

Подготовить для решения в Excel задачу практического занятия № 1 согласно варианту, полученному у преподавателя. Выполнить расчет в Excel, сравнить результаты с результатами графического решения.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о задачах линейного программирования.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Как организовать ввод данных?
2. Как организовать работу с функцией СУММПРОИЗВ?
3. Как подключить инструмент «Поиск решения»?
4. Каков принцип организации ввода ограничений?
5. Какие данные содержатся в отчете «Результаты»?

Практическое занятие № 2

МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

***Цель занятия*:** овладеть приемами построения двойственных задач.

Теоретические сведения

Исходную задачу линейного программирования называют прямой, а задачу, получаемую из нее по некоторым правилам, – двойственной. Рассмотрим в качестве прямой задачу оптимального использования ресурсов. Ее математическая модель имеет вид:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n;$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array}\right\};$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,n},$$

где Z – суммарная прибыль;

x_j – объемы выпуска продукции $(j = \overline{1,\ n})$;

c_j – прибыль от производства единицы j-го вида продукции;

a_{ij} – расход i-го ресурса на единицу j-й продукции;

b_i – объемы используемых ресурсов $(i = \overline{1,\ m})$.

Предположим, что на ресурсы есть покупатель. Необходимо задаться вопросом, какие обстоятельства следует учесть при продаже этих ресурсов. Если искомые цены ресурсов обозначить как y_i, а затраты покупателя – как F, то его интересы будут учтены при функционале

$$\min F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_n.$$

С другой стороны, чтобы не снизились доходы при продаже ресурсов, выручка при их продаже должна быть не меньше, чем прибыль от их использования в собственном производстве. Так как

затраты ресурсов на производство единицы первого вида продукции определяются первым столбцом матрицы коэффициентов прямой задачи, то должно выполняться условие

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1,$$

где c_1 – прибыль от производства единицы первого вида продукции.

Аналогичные условия должны выполняться и для других возможных видов продукции. Следовательно, модель двойственной задачи будет иметь вид:

$$F_{\min} = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_n;$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{array}\right\};$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Значение расчета цен ресурсов состоит не в обосновании целесообразности их продажи, а в оценке их использования и влияния на объем и эффективность производства. Поэтому переменные y_i $(i = \overline{1,\ m})$ называют *двойственными оценками*, или *объективно обусловленными оценками*, а в зарубежной литературе – *теневыми ценами*.

Правила перехода от прямой задачи к двойственной:

1. Если прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум, и наоборот.
2. Каждому из m ограничений прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи.
3. Каждой из n переменных прямой задачи соответствует ограничение двойственной.
4. Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной.
5. Свободные члены b_i ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной.
6. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи, и наоборот.

7. Для пары двойственных симметричных задач все переменные неотрицательны; задаче на максимум соответствуют неравенства типа $\leq$ (меньше либо равно), а задаче на минимум – $\geq$ (больше либо равно).

Первая теорема двойственности: если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то имеет его и другая, причем экстремальные значения целевых функций равны. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции, то система ограничений другой задачи противоречива.

Экономическая интерпретация теоремы такова: если разрешима задача определения оптимального плана производства, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Чтобы план производства и вектор оценок ресурсов были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы доход и суммарная оценка ресурсов совпадали. Несовпадение – сигнал о том, что система находится в нестабильном состоянии, поскольку стоимость потребляемых ресурсов превышает получаемый доход. Таким образом, двойственные оценки выступают как инструмент балансировки затрат и результатов. Второе утверждение теоремы можно интерпретировать так: предположим, что ресурсов недостаточно для обеспечения заданного плана производства, тогда для его выполнения пришлось бы приобретать ресурсы по любой (формально неограниченной) цене.

Малая теорема двойственности: для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.

Теорема об оценках: двойственные оценки численно равны изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу, точнее

$$\frac{\partial Z(x^*)}{\partial b_i} = y_i, \ (i = \overline{1, m}).$$

Экономический смысл заключается в том, что единичный прирост ресурса (при оптимальном его использовании) позволяет увеличить доход на величину, равную теневой цене этого ресурса.

Методика выполнения работы

Задача. На практическом занятии № 1 «Решение задач линейного программирования симплекс-методом» рассматривалась задача об оптимальном производственном плане. Математическая модель имела вид:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 110, \\ &x_1 + x_2 + 4x_3 \le 110, \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$$

Необходимо составить математическую модель двойственной задачи, определить решение на основании прямой задачи и дать экономическую оценку решения.

Решение

1. Поскольку прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум.
2. В исходной задаче три ограничения, следовательно, в двойственной задаче будет три переменные: y_1, y_2, y_3.
3. В прямой задаче три переменные, следовательно, в двойственной будет три ограничения.
4. Коэффициенты целевой функции прямой задачи станут свободными членами ограничений двойственной.
5. Свободные члены ограничений прямой задачи станут коэффициентами целевой функции двойственной.
6. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи получится транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи.
7. Переменные $y_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}$.
8. Модель согласно приведенным правилам примет вид:

$$\min F = 110y_1 + 110y_2 + 100y_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6y_1 + y_2 + 5y_3 \ge 2, \\ &2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 3, \\ &5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 8 \end{aligned}\right\};$$

$$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}.$$

Согласно первой теореме двойственности значение целевой функции $F_{\min} = 176$.

Симплексная таблица позволяет определить решение двойственной задачи: $y_1 = 1{,}6$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0$ (см. табл. 4 практического занятия № 1: $x_4 = {}^8/_5$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0$).

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Рацион коровы состоит из нескольких видов кормов, количество питательных веществ в рационе не должно быть ниже заданного. Составить двойственную задачу на основании математической модели согласно полученному варианту.

Вариант 1

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 12, \\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 16 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Вариант 2

$$\min Z = 7x_1 + 13x_2 + 8x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ &x_1 + x_3 \ge 4, \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 2 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 3

$$\min Z = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_3 \ge 5, \\ &x_1 + x_2 \ge 4, \\ &3x_2 + 6x_3 \ge 8 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 4

$$\min Z = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4;$$

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 12, \\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 16, \\ &x_1 + x_2 + x_4 \ge 15 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Задание 2. Предприятие выпускает три вида комбикормов. Имеющиеся ресурсы – оборудование и два вида сырья. Есть дополнительные ограничения по обязательному выпуску комбикорма. Составить двойственную задачу на основании математической модели согласно полученному варианту.

Вариант 1

$$\max Z = 2x_1 + 5x_2 + 10x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 150, \\ &4x_1 + 10x_3 \le 100, \\ &8x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 160, \\ &x_3 \ge 20 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 2

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180, \\ &x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ &2x_1 + 2x_2 \le 120, \\ &x_2 \ge 50 \end{aligned}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 3

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 180, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 100, \\ 3x_2 + 1x_3 \le 100, \\ x_1 \ge 30 \end{array}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Вариант 4

$$\max Z = 12x_1 + 4x_2 + 3x_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 150, \\ x_1 + 3x_3 \le 120, \\ x_1 + 2x_2 \le 100, \\ x_3 \ge 40 \end{array}\right\};$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение математической модели задачи оптимального использования ресурсов.
2. Каковы правила перехода от прямой задачи к двойственной?
3. Каково значение расчета цен ресурсов?
4. Какова экономическая интерпретация первой теоремы двойственности?
5. В чем состоит экономический смысл теоремы об оценках?

Лабораторная работа № 12

РЕАЛИЗАЦИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ НАДСТРОЙКИ EXCEL «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками работы составления и решения двойственных задач линейного программирования с использованием надстройки Excel «Поиск решения».

Методика выполнения работы

Задача. Предприятие может производить четыре вида сельскохозяйственного оборудования и имеет следующие ресурсы: труд (20 чел.-дней), сырье (50 кг) и оборудование (45 станко-часов). Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимом для производства единицы продукции каждого вида, и получаемых доходах приведена в табл. 1.

Таблица 1

Ресурсы предприятия

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на одно изделие			
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
Труд, чел.-дней	0,6	1	2	2,5
Сырье, кг	3	5	2	3
Оборудование, станко-часов	5	4	3	4
Прибыль, усл. д. ед.	20	25	40	50

Требуется:

1. Сформулировать экономико-математическую модель задачи: найти план выпуска продукции, при котором прибыль будет максимальной.
2. Сформулировать экономико-математическую модель и найти оптимальный план двойственной задачи.
3. Используя протоколы надстройки «Поиск решения», проанализировать полученное оптимальное решение двойственной задачи.

Решение

1. Сформулировать экономико-математическую модель задачи о производстве на максимум общей стоимости продукции.

Переменные – количество выпускаемых изделий. Целевая функция – максимум стоимости выпускаемой продукции:

$$\max Z = 20x_1 + 25x_2 + 40x_3 + 50x_4.$$

Ограничения по ресурсам:

– по труду: $0{,}6x_1 + x_2 + 2x_3 + 2{,}5x_4 \le 20$;

– по сырью: $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 50$;

– по оборудованию: $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 45$.

Все переменные неотрицательны ($x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$).

2. Используя надстройку «Поиск решения», найти план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции будет максимальной. Полученное решение: максимальный доход в размере 430 усл. д. ед. предприятие может получить при выпуске 6 изделий второго вида и 7 изделий третьего. Изделия первого и четвертого видов не вошли в план. Ресурсы «Труд» и «Оборудование» будут использованы полностью, а из 50 кг сырья будет использовано 44 кг.

3. Рассмотреть экономическую интерпретацию двойственной задачи. Сформулировать экономико-математическую модель согласно правилам построения двойственных задач.

Число неизвестных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений в исходной задаче. Исходная задача содержит три ограничения: по труду, сырью и оборудованию. Следовательно, в двойственной задаче три неизвестных:

y_1 – двойственная оценка ресурса «труд», или «цена» труда;

y_2 – двойственная оценка ресурса «сырье», или «цена» сырья;

y_3 – двойственная оценка ресурса «оборудование», или «цена» оборудования.

Целевая функция двойственной задачи формулируется на минимум. Необходимо найти такие «цены» на ресурсы y, чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи.

Число ограничений в системе двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче (т. е. четырем). В правых частях ограничений двойственной задачи стоят коэффициенты при неиз-

вестных в целевой функции исходной задачи. Левая часть ограничений определяет стоимости ресурсов, затраченных на производство единицы продукции. Каждое ограничение соответствует определенному виду продукции.

4. Используя надстройку «Поиск решения», найти решение задачи.

Отчет по устойчивости содержит следующую информацию:

– *окончательное значение* (значения переменных);

– *нормированную стоимость*, показывающую, насколько изменится значение целевой функции в случае принудительного включения единицы этой продукции в решение;

– *предельные значения целевых коэффициентов*, при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение;

– *предельные значения приращения* ресурсов, показывающие, насколько можно уменьшить или увеличить ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Дефицитны ресурсы «труд» и «оборудование». Возникает вопрос, насколько должен возрасти запас этих ресурсов, чтобы увеличился выпуск продукции;

– *теневую цену* (ценность дополнительной единицы ресурса), рассчитываемую только для дефицитных ресурсов. Нулевая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Но недефицитность возникает не из-за неограниченности запасов, а из-за невозможности использовать ресурс в оптимальном плане. Если стоимость ресуров, затраченных на производство одного изделия, больше его цены, то изделие не войдет в оптимальный план из-за своей убыточности.

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Используя условие задания к практическому занятию № 1 «Решение задач линейного программирования симплекс-методом», составить двойственную задачу и решить ее с помощью надстройки «Поиск решения». Сравнить отчеты «Устойчивость» прямой и двойственной задачи. Определить, изменение каких ресурсов позволит улучшить оптимальный план.

Задание 2. Предприятие выпускает четыре вида колбас. Ежедневные ресурсы: сырье (96 ц), труд (20 чел.-дней) и электроэнергия (23 кВт·ч). Для производства единицы продукции требуются соответствующие ресурсы в количестве:

– сырье – 1,32; 1,25; 1,6; 1,19 ц;
– труд – 0,31; 0,29; 0,33; 0,21 чел.-дней;
– электроэнергия – 0,28; 0,33; 0,31; 0,19 кВт·ч.

Предполагаемая прибыль предприятия от реализации единицы продукции каждого вида составит соответственно 6, 7, 8 и 6 усл. д. ед.

Записать модель оптимальной программы производства колбас продукции. Решить задачу, используя надстройку «Поиск решения» Excel.

Построить и решить в Excel двойственную задачу. Найти двойственные оценки ресурсов. Сравнить отчеты «Устойчивость» прямой и двойственной задачи. Расположить отдельные виды ресурсов по степени их эффективности с точки зрения поставленной цели.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о двойственных задачах линейного программирования.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается суть двойственных оценок?
2. Перечислите основные свойства двойственных оценок.
3. Опишите алгоритм составления двойственной задачи.
4. Как найти решение двойственной задачи, если прямая уже решена?
5. В каком виде должна быть записана модель задачи линейного программирования для решения симплекс-методом?

Практическое занятие № 3

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

***Цель занятия*:** овладеть приемами решения транспортной задачи методом потенциалов.

Теоретические сведения

Модель транспортной задачи называют *открытой*, если спрос и предложение не равны, и *закрытой* в случае их равенства. Специальный алгоритм решения применим только к закрытой модели, открытую же необходимо преобразовать в закрытую. В ситуации, когда предложение больше спроса, достаточно ввести фиктивного получателя с объемом спроса, равным разнице между спросом и предложением, а в ситуации дефицита – ввести фиктивного поставщика с соответствующим объемом поставки. Тарифы фиктивных перевозок считаются нулевыми, а результаты интерпретируются следующим образом: поставки к фиктивному получателю – грузы, оставшиеся у поставщика; поставки от фиктивного поставщика – недовыполнение заказа получателя.

Методы построения начального опорного плана:

1. Метод северо-западного угла – таблица заполняется начиная с верхнего левого угла.

2. Метод минимального элемента, использующий следующую последовательность действий:

1) выбрать в транспортной таблице ячейку с минимальной стоимостью перевозок. Если таких ячеек несколько – любую из них;

2) присвоить переменной в выбранной ячейке максимально возможное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение;

3) подкорректировать значения спроса и предложения, уменьшая их на величину значения занесенной переменной. Одно из этих значений обязательно будет равно нулю;

4) вычеркнуть строку (столбец) с обнуленной величиной ограничения, чтобы не присваивать значения остальным переменным.

Если одновременно обнуляются значения и спроса и предложения, вычеркивается что-то одно;

5) если осталось больше одной ячейки – вернуться к первому шагу. Если одна – занести в нее еще не распределенный груз, для которого спрос и предложение всегда будут совпадать.

Метод потенциалов основан на соотношениях теории двойственности и состоит в том, что каждому поставщику ставятся в соответствие числа (потенциалы) u_i, а каждому получателю – v_j, удовлетворяющие условию $u_i + v_j = c_{ij}$ (c_{ij} – тарифы на перевозку) в тех клетках таблицы, которые вошли в опорный план. Таких клеток ($m + n$), а потенциалов ($m + n - 1$), где m – количество поставщиков, n – получателей. Потенциалы можно интерпретировать как выплаты за единицу груза, получаемые транспортной организацией как при погрузке, так после доставки груза. Величины потенциалов могут быть любого знака, но выплаты за перевозку по тому опорному плану, для которого они определены, будут точно соответствовать заданным тарифам.

Для незаполненных клеток значение разности $c_{ij} - (u_i + v_j)$ может оказаться любого знака. Если $c_{ij} - (u_i + v_j) > 0$, то включение такой клетки в базис только увеличит суммарные затраты. Следовательно, если во всех незаполненных клетках тарифы превышают суммы потенциалов, то план оптимален. Рассматриваемые разности являются оценками переменных, поэтому, если план еще не является оптимальным, нужно выбрать для включения в базис ту клетку, для которой абсолютное значение отрицательной оценки $c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$ является наибольшим, и занести в нее максимально возможную величину перевозимого груза. Балансы по строкам и столбцам необходимо сохранить, а все переменные должны оставаться неотрицательными.

Методика выполнения работы

Задача. Требуется минимизировать транспортные издержки на доставку картофеля (т) получателям (магазинам) со складов фирмы-поставщика, учитывая приведенные в табл. 1 тарифы на перевозку единицы продукции (усл. д. ед.), объем заказа (т) и количество продукции (т), хранящейся на каждом складе.

Таблица 1

Исходные данные

Предложение поставщиков	Спрос получателей		
	40	50	60
30	4	12	9
70	11	10	7
70	1	4	5

Определить начальный опорный план транспортной задачи:

1) методом северо-западного угла;

2) методом минимального элемента.

Рассчитать стоимость перевозки при начальном опорном плане для каждого метода.

Решение

1. Определить начальный опорный план методом северо-западного угла.

1.1. Проанализировать условия задачи. Запасы – 170 единиц. Потребность – 150 единиц. Для приведения задачи к закрытому виду ввести фиктивного получателя (табл. 2).

Таблица 2

Исходные данные с учетом фиктивного получателя

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
30	4	12	9	0
70	11	10	7	0
70	1	4	5	0

1.2. Записать в северо-западный угол транспортной таблицы требуемое количество груза в зависимости от возможностей поставщиков (30 единиц). Когда первый ресурс распределен, транспортная таблица преобразуется в соответствии с табл. 3.

Таблица 3

Начало расчета по методу северо-западного угла

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
0 (30)	4 **30**	12 ~	9 ~	0 ~
70	11	10	7	0
70	1	4	5	0

Северо-западным углом становится следующая ячейка. Алгоритм продолжается до окончательного заполнения транспортной таблицы. Начальный опорный план по методу северо-западного угла представлен в табл. 4.

Таблица 4

Начальный опорный план по методу северо-западного угла

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
30	4 **30**	12 ~	9 ~	0 ~
70	11 **10**	10 **50**	7 **10**	0 ~
70	1 ~	4 ~	5 **50**	0 **20**

2. Определить начальный опорный план методом минимального элемента (исходные данные – табл. 2).

Выбрать в транспортной таблице ячейку с минимальной стоимостью перевозок и записать в нее максимально возможное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение. Подкорректировать значения спроса и предложения. Вычеркнуть столбец с обнуленной величиной ограничения (табл. 5).

Таблица 5

Начало расчета по методу минимального элемента

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	0 (40)	50	60	20
30	4 ~	12	9	0
70	11 ~	10	7	0
30 (70)	1 **40**	4	5	0

Алгоритм продолжается до окончательного заполнения транспортной таблицы. Нераспределенные грузы записываются в столбец фиктивного получателя. Начальный опорный план по методу минимального элемента приведен в табл. 6.

Таблица 6

Начальный опорный план по методу минимального элемента

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
30	4	12 **10**	9	0 **20**
70	11	10 **10**	7 **60**	0
70	1 **40**	4 **30**	5	0

3. По данным табл. 4 рассчитать значение целевой функции – суммы произведений количества груза на стоимость перевозки единицы груза по методу северо-западного угла:

$$Z = 30 \cdot 4 + 10 \cdot 11 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 7 + 50 \cdot 5 = 1050.$$

4. По данным табл. 6 рассчитать значение целевой функции по методу минимального элемента:

$$Z = 40 \cdot 1 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 10 + 30 \cdot 4 + 60 \cdot 7 = 800.$$

5. Продолжить расчет по методу минимального элемента. Определить потенциалы для заполненных клеток, расчет начать с присвоения u_1 значения 0. Определить v_2 и v_4 по формуле $u_i + v_j = c_{ij}$ (табл. 7).

Таблица 7

Определение потенциалов

Предложение поставщиков	Спрос получателей				u_i
	40	50	60	20	
30	4	12 10	9	0 20	**0**
70	11	10 10	7 **60**	0	
70	1 40	4 30	5	0	
v_j		**12**		**0**	–

6. Определить u_2, u_3 и оставшиеся потенциалы (табл. 8).

Таблица 8

Рассчитанные потенциалы

Предложение поставщиков	Спрос получателей				u_i
	40	50	60	20	
30	4	12 10	9	0 20	**0**
70	11	10 10	7 **60**	0	**–2**
70	1 40	4 30	5	0	**–2**
v_j	**9**	**12**	**9**	**0**	–

7. С помощью рассчитанных потенциалов проанализировать пустые клетки транспортной таблицы. Перспективной для ввода в базис является переменная (1; 1), оценка которой $c_{11} - (u_i + v_j) = 4 - (0 + 9)$.

8. Построить замкнутый цикл, который начинается и заканчивается в этой ячейке и состоит из последовательности вертикальных и горизонтальных отрезков (диагональные недопустимы), соединяющих заполненные клетки. Его можно обходить как по часовой стрелке, так и против. Если вводимую в базис переменную пометить знаком «+» и изменять знак в каждой угловой точке цикла, то в любой строке и любом столбце каждому знаку «+» будет соответствовать знак «–». Следовательно, если всем участвующим в цикле переменным дать некоторое приращение Δ с соответствующими знаками, то все балансовые соотношения по строкам и столбцам будут сохранены. Чтобы объемы перевозок оставались неотрицательными, это приращение Δ нужно взять равным минимальному по абсолютной величине значению переменной из числа помеченных знаком «–» (табл. 9).

9. Определить потенциалы для полученного решения (табл. 10).

10. Построить цикл (табл. 11). Перспективной для ввода в базис является переменная (2; 4).

11. Определить потенциалы для полученного решения (табл. 12).

Таблица 9

Построение цикла

Предложение поставщиков	Спрос получателей				u_i
	40	50	60	20	
30	4 –5	12 10	9	0 20	**0**
70	11	10 10	7 **60**	0	**–2**
70	1 40	4 30	5	0	**–2**
v_j	**9**	**12**	**9**	**0**	–

Таблица 10

Определение потенциалов

Предложение поставщиков	Спрос получателей				u_i
	40	50	60	20	
30	4 10	12	9	0 20	**0**
70	11	10 10	7 60	0	**3**
70	1 30	4 40	5	0	**–3**
v_j	**4**	**7**	**4**	**0**	–

Таблица 11

Построение цикла для улучшенного опорного плана

Предложение поставщиков	Спрос получателей				u_i
	40	50	60	20	
30	4 10	12	9	0 20	**0**
70	11	10 10	7 60	0 –3	**3**
70	1 30	4 40	5	0	**–3**
v_j	**4**	**7**	**4**	**0**	–

Таблица 12

Определение потенциалов (установление оптимальности опорного плана)

Предложение поставщиков	Спрос получателей				u_i
	40	50	60	20	
30	4 20	12	9	0 10	**0**
70	11	10	7 60	0 10	**0**
70	1 20	4 50	5	0	**–3**
v_j	**4**	**7**	**7**	**0**	–

В базис нельзя ввести ни одной клетки, значит оптимальное решение получено. Затраты на перевозку составят 720 единиц (сумма произведений грузов на тарифы).

Задание для самостоятельного выполнения

Поставщик комбикормов имеет три склада. Три свинокомплекса сделали заказ на покупку (т). Известны транспортные тарифы (усл. д. ед.) на перевозку 1 т комбикорма каждому заказчику с каждого склада.

Методом потенциалов определить оптимальный план доставки комбикорма на свинокомплексы, минимизирующий транспортные издержки поставщика.

Вариант 1

Предложение	Спрос		
	40	50	60
30	4	12	9
70	11	10	7
70	1	4	5

Вариант 2

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	7	8	1
60	4	5	9
50	5	13	3

Вариант 3

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	5	7	4
60	11	12	10
50	6	9	10

Вариант 4

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	3	1	2
60	8	11	7
50	5	4	10

Вариант 5

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	8	5	3
60	5	3	2
50	6	7	11

Вариант 6

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	3	2	4
60	9	7	10
50	5	7	8

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятиям открытой и закрытой транспортной задачи. Как привести транспортную задачу к закрытому виду?
2. Опишите алгоритм определения начального опорного плана по методу северо-западного угла.
3. Опишите алгоритм определения начального опорного плана по методу минимального элемента.
4. Как определить перспективные клетки для ввода в базис?
5. Как построить цикл?

Практическое занятие № 4

ФОРМИРОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЦИОНА КОРМЛЕНИЯ ЖИВОТНЫХ

***Цель занятия*:** освоить методику составления развернутой модели оптимизации рациона кормления животного.

Теоретические сведения

Модель оптимизации рациона кормления скота позволяет в полной мере учесть особенности развития животных, их кормления и формирования продуктивности. Она применяется в первую очередь в высокоорганизованных хозяйствах, фермерских хозяйствах, где есть возможность подчинить кормовую базу интересам формирования оптимального рациона кормления отдельных видов животных.

Задача решается в расчете на 1 голову без непосредственной связи с наличными ресурсами кормов. Расчет по модели может производиться на планируемый год или ближайшую перспективу.

Чтобы исключить непродуктивный расход питательных веществ, выделяются вещества, находящиеся в рационе с другими в пропорциональной связи (например, кормовые единицы – с переваримым протеином и каротином, кальцием, железом и т. д.).

Полноценное кормление предполагает определенное разнообразие кормов и ориентирует на то, что питательность однородной группы кормов ограничивается снизу и сверху. Выход за эти пределы снижает общую окупаемость рационов.

Структурная экономико-математическая модель (ЭММ) оптимизации рациона кормления животного содержит следующие условные обозначения:

– *индексация*:

j – номер корма;

J_0 – множество видов корма;

j^0 – номер корма однородной группы, $j^0 \in j$;

J_1 – множество кормов однородной группы, $J_1 \in J_0$;

J_2 – множество групп однородных видов кормов, $J_2 \in J_0$;

i – номер питательного вещества;

I_0 – множество питательных веществ рациона;

I_1 – множество веществ, находящихся с другими в пропорциональной связи (т. е. в соответствии с ними устанавливается вес других), $I_1 \in I_0$;

I_2 – множество пар питательных веществ, находящихся друг с другом в пропорциональной связи, $I_2 \in I_0$;

– *неизвестные*:

x_j – вес корма j в рационе;

x_i – точное количество питательного вещества i, от которого зависит вес других веществ;

– *известные*:

A_i – минимальная потребность в i-м питательном веществе;

W'_j, W_j – соответственно минимальная и максимальная нормы скармливания корма j;

a_{ij} – питательность, т. е. содержание вещества i в единице корма j;

a_{ijj^0} – содержание вещества i в корме j, принадлежащем к j^0 однородной группе;

d'_i, d_i – соответственно минимальная и максимальная нормы питательного вещества i на единицу другого вещества;

b'_{ij^0}, b_{ij^0} – соответственно минимальная и максимальная по веществу i питательность кормов j^0, принадлежащая к однородной группе кормов;

λ_j – стоимость единицы корма j.

Требуется найти x_j, x_i при следующих условиях:

1) содержание питательных веществ в рационе должно быть не меньше установленного минимума:

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \geq A_i, \; i \in I_0.$$

Выражение $a_{ij}x_j$ обозначает питательность корма по какому-то из веществ i. При $i = 1$ к. ед. выражение $a_{ij}x_j$ будет обозначать количество кормовых единиц в каком-то из кормов j.

Поскольку полноценность рациона зависит не только от веса отдельных питательных веществ, но и от соотношения между веществами, необходимо ввести равенство по тем веществам, по отношению к которым определяется вес других веществ;

2) ограничение по точному содержанию питательных веществ в рационе:

$$\sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j = x_i, \; i \in I_1;$$

3) ограничение по количеству питательных веществ, находящихся друг с другом в пропорциональной связи:

$$d'_i x_i \le \sum_{j \in J_0} a_{ij} x_j \le d_i x_i, \; i \in I_2;$$

4) ограничение по питательности отдельных однородных групп кормов в общей питательности рациона:

$$b'_{ij^0} x_i \le \sum_{j \in J_0} a_{ijj^0} x_j \le b_{ij^0} x_i, \; i = 1, j^0 \in I_2;$$

5) ограничение по весу отдельных кормов в рационе:

$$W'_j \le x_j \le W_j, \; j \in J_0;$$

6) ограничение неотрицательности:

$$x_j \le 0.$$

Целевая функция

$$F_{\min} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j.$$

Методика выполнения работы

Задача. На основе структурной модели составить развернутую модель оптимального рациона кормления.

Рацион составляется на базе кормов: концентраты, сено, сенаж, корнеплоды. Годовой надой от 1 коровы – 38 ц, на 1 ц молока расходуется 1,2 к. ед. В оптимальном рационе на 1 ц к. ед. должно приходиться не менее 0,105 ц переваримого протеина.

Питательность грубых кормов – не менее 10 и не более 35 % от питательности всего рациона. В группе грубых кормов на долю сена должно приходиться 55 % от питательности кормов этой группы.

Ограничения по скармливанию отдельных видов кормов: концентраты – не менее 6 и не более 10 ц, корнеплоды – не более 45 ц.

Стоимость 1 ц корма: концентраты – 8 усл. д. ед., сено – 3 усл. д. ед., сенаж – 3,5 усл. д. ед., корнеплоды – 2 усл. д. ед.

Решение

1. Ввести неизвестные переменные по количеству кормов в рационе, а также неизвестную переменную по точному содержанию питательных веществ в рационе:

x_1 – концентраты, ц;

x_2 – сено, ц;

x_3 – сенаж, ц;

x_4 – корнеплоды, ц;

x_5 – точное количество комовых единиц в рационе, ц к. ед.

2. Составить ограничения задачи:

– по содержанию в рационе кормовых единиц в размере не ниже установленного минимума (табл. 1):

$$x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 + 0{,}12x_4 \geq 1{,}2 \cdot 38;$$

– по точному количеству кормовых единиц в рационе:

$$x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 + 0{,}12x_4 = x_5;$$

– по содержанию в рационе переваримого протеина в размере не ниже установленного минимума:

$$0{,}105x_1 + 0{,}053x_2 + 0{,}033x_3 + 0{,}009x_4 \geq 0{,}105x_5;$$

– по минимальному содержанию грубых кормов:

$$0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 \geq 0{,}1x_5;$$

– по максимальному содержанию грубых кормов:

$$0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 \leq 0{,}35x_5;$$

– по питательности сена в группе грубых кормов:

$$0{,}45x_2 = 0{,}55\,(0{,}45x_2 + 0{,}28x_3);$$

– по минимальному весу концентратов:

$$x_1 \geq 6;$$

– по максимальному весу концентратов:

$$x_1 \leq 10;$$

– по максимальному весу корнеплодов:

$$x_4 \leq 45.$$

Таблица 1

Содержание кормовых единиц и переваримого протеина в единице корма

Вид корма	Кормовые единицы	Переваримый протеин
Концентраты	1,00	0,105
Сено	0,45	0,053
Солома	0,25	0,011
Силос	0,20	0,014
Сенаж	0,28	0,033
Корнеплоды	0,12	0,009
Зеленый корм	0,19	0,021

Критерий оптимальности – минимум стоимости рациона. Целевая функция будет иметь вид:

$$F_{\min} = 8x_1 + 3x_2 + 3{,}5x_3 + 2x_4.$$

Задание для самостоятельного выполнения

На основе структурной модели составить развернутую модель оптимального рациона кормления среднегодовой коровы.

Рацион составляется на базе кормов: концентраты, сено, силос, сенаж, корнеплоды, зеленый корм. Фактическая продуктивность среднегодовой коровы – 40 ц молока. Расход кормовых единиц на 1 ц молока – 1,15. В кормовом рационе в расчете на 1 ц кормовых единиц должно приходиться не менее 0,105 г переваримого протеина.

Нормы скармливания по отдельным видам корма приведены в табл. 2.

Таблица 2

Ограничения по скармливанию отдельных видов кормов

Вид корма	Минимальная норма скармливания	Максимальная норма скармливания
Концентраты	6,5	10,5
Сено	–	25
Силос	–	25
Сенаж	20	50
Корнеплоды	5	45
Зеленый корм	50	65

В соответствии с зоотехническими требованиями питательность сочных кормов должна составлять не менее 20 и не более 48 %, грубых кормов – не менее 10 и не более 35 % от питательности всего рациона.

В группе грубых кормов на долю сена должно приходиться 60 % от питательности кормов этой группы.

Стоимость 1 ц корма: концентраты – 7,9 усл. д. ед., сено – 3,3 усл. д. ед., силос – 2,3 усл. д. ед., сенаж – 3,5 усл. д. ед., корнеплоды – 2,2 усл. д. ед., зеленый корм – 0,9 усл. д. ед.

Контрольные вопросы

1. Каковы критерии оптимальности модели рациона кормления?
2. Какие требования учитывают в модели рациона кормления?
3. Учитывают ли при составлении рациона кормления поголовье животных в хозяйстве? Почему?
4. Какие корма относятся к группе сочных кормов?
5. Какие корма относятся к группе грубых кормов?

Лабораторная работа № 13

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЦИОНА КОРМЛЕНИЯ ЖИВОТНЫХ С ПОМОЩЬЮ НАДСТРОЙКИ EXCEL «ПОИСК РЕШЕНИЯ»

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками по составлению и расчету задач оптимизации рациона кормления в Excel.

Теоретические сведения

После составления развернутой экономико-математической модели переходят к ее реализации, которая включает формирование матрицы и решение экономико-математической задачи.

Прежде чем составлять матрицу задачи, ограничения необходимо преобразовать: выполнить арифметические действия, все неизвестные перенести в левую часть ограничений, а свободные члены – в правую. Например, ограничение по питательности грубых кормов (нижняя граница) имело вид $0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 \geq 0{,}1x_5$, а преобразовалось в выражение $0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 - 0{,}1x_5 \geq 0$.

Всю имеющуюся информацию необходимо представить на листе Excel и получить в результате матрицу задачи. После внесения ограничений и целевой функции в матрицу приступить к решению задачи.

Методика выполнения работы

Задача. Используя развернутую экономико-математическую модель, составленную на практическом занятии № 4 «Формирование ограничений экономико-математической задачи рациона кормления животных», рассчитать в Excel оптимальный рацион кормления животного минимальной стоимости.

Решение

1. Для записи информации в матрицу предварительно выполнить необходимые преобразования составленной экономико-математической модели оптимизации рациона кормления животного, после чего модель примет следующий вид:

1) ограничения задачи:

– по содержанию в рационе кормовых единиц (не ниже установленного минимума):

$$x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 + 0{,}12x_4 \geq 45{,}6;$$

– по точному количеству кормовых единиц в рационе:

$$x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 + 0{,}12x_4 = 0;$$

– по содержанию в рационе переваримого протеина:

$$0{,}105x_1 + 0{,}053x_2 + 0{,}033x_3 + 0{,}009x_4 - 0{,}105x_5 \geq 0;$$

– по питательности грубых кормов (нижняя граница):

$$0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 - 0{,}1x_5 \geq 0;$$

– по питательности грубых кормов (верхняя граница):

$$0{,}45x_2 + 0{,}28x_3 - 0{,}35x_5 \leq 0;$$

– по питательности сена в группе грубых кормов:

$$0{,}2025x_2 - 0{,}154x_3 = 0;$$

– по минимальному весу концентратов в рационе:

$$x_1 \geq 6;$$

– по максимальному весу концентратов в рационе:

$$x_1 \leq 10;$$

– по максимальному весу корнеплодов в рационе:

$$x_4 \leq 45;$$

2) целевая функция задачи:

$$F_{\min} = 8x_1 + 3x_2 + 3{,}5x_3 + 2x_4.$$

2. После преобразований заполнить на листе Excel (рис. 1) экономико-математическую модель оптимизации рациона кормления животного (в расчете на среднегодовую голову) в матричном виде.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Концентраты	Сено	Сенаж	Корнеплоды	Точное количество КЕ в рационе	Сумма произведений	Знак	Объем ограничений
2		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**			
3	Прогнозное значение								
4	по содержанию в рационе КЕ	1	0,45	0,28	0,12		0	>=	45,6
5	по точному количеству КЕ в рационе	1	0,45	0,28	0,12	-1	0	=	0
6	по содержанию в рационе ПП	0,105	0,053	0,033	0,009	-0,105	0	>=	0
7	по питательности грубых кормов (нижняя граница)		0,45	0,28		-0,1	0	>=	0
8	по питательности грубых кормов (верхняя ганица)		0,45	0,28		-0,35	0	<=	0
9	по питательности сена в группе грубых кормов		0,2025	-0,154			0	=	0
10	по минимальному весу концентратов в рационе	1					0	>=	6
11	по максимальному весу концентратов в рационе	1					0	<=	10
12	по максимальному весу корнеплодов в рационе				1		0	<=	45
13	Целевая функция (min)	8	3	3,5	2		0		
14									
15									
16									
17									
18									

Лист1 Лист2 Лист3

Готово 116%

Рис. 1. Экономико-математическая модель оптимизации рациона кормления животного (в расчете на среднегодовую голову)

Технико-экономические коэффициенты и оценки целевой функции (столбцы B, C, D, E, F) определяются согласно левой части уравнений с учетом преобразований, описанных выше. Объемы ограничений (столбец I) – согласно правой части уравнений.

Для искомых величин переменных $x_1 ... x_5$ оставляются пустые ячейки – B3...F3 соответственно.

Столбец G (сумма произведений) предназначен для определения суммы произведений значений искомых неизвестных (ячейки B3...F3) и технико-экономических коэффициентов по соответствующим ограничениям (строки 4...12) и целевой функции (строка 13).

Например, формула нахождения суммы произведений для ячейки G4 с ограничением по содержанию в рационе кормовых единиц следующая: =СУММПРОИЗВ($B$3:$F$3;B4:F4).

Для расчета оптимального рациона минимальной стоимости необходимо воспользоваться инструментом «Поиск решения», который находится во вкладке **Данные**:

1. Выполнить команду **Данные → Анализ → Поиск решения**. Появится соответствующее диалоговое окно (рис. 2).

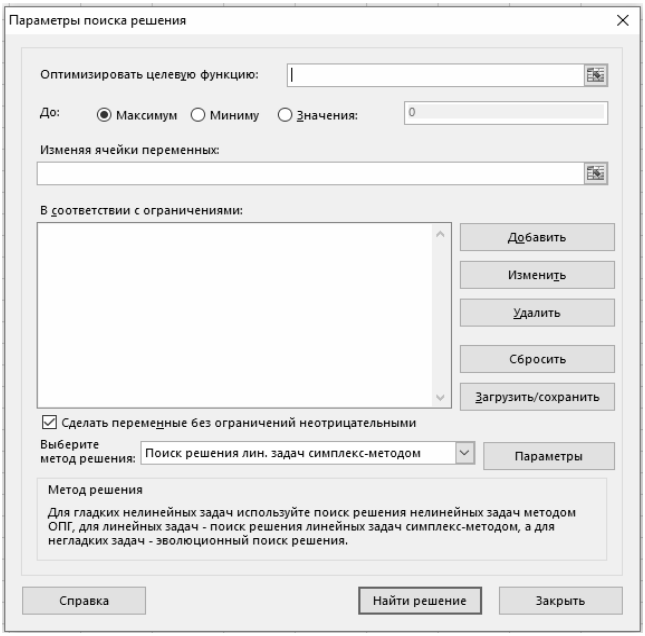


Рис. 2. Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

2. В поле **Изменяя ячейки переменных** указать ячейки или диапазоны ячеек, значения которых необходимо найти (в рассматриваемом случае – B3:F3). Если ячеек либо диапазонов ячеек несколько, они пишутся через точку с запятой.

3. Для учета ограничений, которые накладываются на условия задачи, необходимо нажать на кнопку **Добавить**, появится диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 3). Введя ограничение, нажать на кнопку **Добавить**, а после ввода последнего ограничения – на кнопку **ОК**.

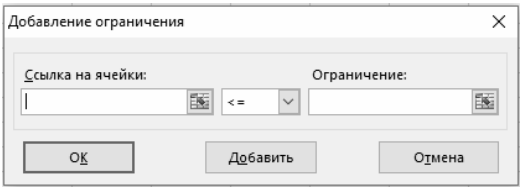


Рис. 3. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

4. Нажать на кнопку **Выполнить**. После завершения расчетов появится диалоговое окно **Результаты поиска решения**.

Если поиск решения *успешно завершен*, в диалоговом окне выводится одно из следующих сообщений:

- решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Это значит, что все ограничения соблюдены с установленной точностью и найдено заданное значение целевой ячейки;

- поиск свелся к текущему решению. Все ограничения выполнены.

Относительное влияние значения в целевой ячейке за последние пять итераций стало меньше установленного значения параметра **Сходимость** в диалоговом окне **Параметры поиска решения**. Чтобы найти более точное решение, следует установить меньшее значение параметра **Сходимость**, но тогда поиск займет больше времени.

Если поиск *не может найти оптимальное решение*, в диалоговом окне выводится одно из следующих сообщений:

- поиск не может улучшить текущее решение. Все ограничения выполнены.

В процессе поиска решения нельзя найти такой набор значений влияющих ячеек, который был бы лучше текущего решения. Приблизительное решение найдено, но либо дальнейшее уточнение невозможно, либо заданная погрешность слишком высока. Следует изменить погрешность на меньшее число и запустить процедуру поиска решения снова;

- поиск остановлен (истекло заданное на поиск время).

Время, отпущенное на решение задачи, исчерпано, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Чтобы при следующем запуске процедуры поиска решения не повторять выполненные вычисления, нужно установить переключатель **Сохранить найденное решение** или **Сохранить сценарий**;

- поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций).

Произведено разрешенное число итераций, но достичь удовлетворительного решения не удалось. Может помочь увеличение числа итераций, однако следует изучить результаты, чтобы понять причины остановки. Чтобы не повторять выполненные вычисления, нужно сохранить найденное решение или сценарий;

- значения целевой ячейки не сходятся.

Значение целевой ячейки неограниченно увеличивается (уменьшается), даже если все ограничения соблюдены. Возможно, в задаче следует снять одно ограничение или сразу несколько. Нужно изучить процесс расхождения решения, проверить ограничения и запустить задачу снова;

- поиск не может найти подходящего решения.

В процессе поиска решения нельзя сделать итерацию, которая удовлетворяла бы всем ограничениям при заданной точности. Вероятно, ограничения противоречивы. Необходимо исследовать лист на предмет возможных ошибок в формулах ограничений или в выборе ограничений;

- поиск остановлен по требованию пользователя.

Нажата кнопка **Стоп** в диалоговом окне **Текущее состояние поиска решения** в процессе выполнения итераций;

- условия для линейной модели не удовлетворяются.

Установлен флажок **Линейная модель**, однако итоговый пересчет порождает такие значения, которые не согласуются с линейной моделью. Это означает, что решение недействительно для данных формул листа. Чтобы проверить линейность задачи, следует установить флажок **Автоматическое масштабирование** и повторно запустить поиск. Если сообщение опять появится на экране – снять флажок **Линейная модель** и снова запустить поиск;

- при поиске решения обнаружено ошибочное значение в целевой ячейке или ячейке ограничения.

При пересчете значений ячеек обнаружена ошибка в одной формуле или в нескольких сразу. Следует найти целевую ячейку или ячейку ограничения, порождающие ошибку, и изменить их формулы так, чтобы они возвращали подходящее числовое значение.

Набрано неверное имя или формула в окне **Добавить ограничение**, окне **Изменить ограничение** либо задано целое или двоичное ограничение в поле **Ограничение**. Чтобы ограничить значения ячейки множеством целых чисел, нужно выбрать оператор целого ограничения в списке условных операторов. Чтобы установить двоичное ограничение – выбрать одноименный оператор;

- мало памяти для решения задачи.

Система не смогла выделить память, необходимую для поиска решения. Следует закрыть некоторые файлы или приложения и попытаться выполнить поиск еще раз;

- другой экземпляр Excel использует SOLVER.DLL.

Запущено несколько копий Microsoft Excel, в одном из которых используется файл Solver.dll.

5. Установить переключатель **Сохранить найденное решение**, если полученное решение подходит, или **Восстановить исходное значение**, если необходимо вернуться к исходному варианту.

6. При необходимости указать тип отчета, который будет выводиться на отдельном листе книги:

а) результаты.

Отчет состоит из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их исходных и конечных значений, а также формул ограничений и дополнительных сведений о наложенных ограничениях;

б) устойчивость.

Отчет содержит сведения о чувствительности решения к малым изменениям в формуле модели или в формулах ограничений. Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. В случае нелинейных моделей отчет содержит данные для градиентов и множителей Лагранжа. В отчет по нелинейным моделям включаются ограниченные затраты, фиктивные цены, объективный коэффициент (с некоторым допуском), а также диапазоны ограничений справа;

в) пределы.

Отчет состоит из целевой ячейки и списка влияющих ячеек модели, их значений, а также нижних и верхних границ. Такой отчет не создается для моделей, значения в которых ограничены множеством целых чисел. Нижним пределом является наименьшее значение, которое может содержать влияющая ячейка, в то время как значения остальных влияющих ячеек фиксированы и удовлетворяют наложенным ограничениям. Соответственно, верхним пределом называется наибольшее значение.

7. Нажать на кнопку **ОК**. Результаты поиска решения будут сохранены на рабочем листе (представлены в матрице на рис. 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Концентраты	Сено	Сенаж	Корнеплоды	Точное количество КЕ в рационе	Сумма произведений	Знак	Объем ограничений
2		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**			
3	Прогнозное значение	**10,0**	**8,5**	**11,2**	**24,9**	**20,0**			
4	по содержанию в рационе КЕ	1	0,45	0,28	0,12		20,0	>=	45,6
5	по точному количеству КЕ в рационе	1	0,45	0,28	0,12	-1	0,0	=	0
6	по содержанию в рационе ПП	0,105	0,053	0,033	0,009	-0,105	0,0	>=	0
7	по питательности грубых кормов (нижняя граница)		0,45	0,28		-0,1	5,0	>=	0
8	по питательности грубых кормов (верхняя ганица)		0,45	0,28		-0,35	0,0	<=	0
9	по питательности сена в группе грубых кормов		0,2025	-0,154			0,0	=	0
10	по минимальному весу концентратов в рационе	1					10,0	>=	6
11	по максимальному весу концентратов в рационе	1					10,0	<=	10
12	по максимальному весу корнеплодов в рационе				1		24,9	<=	45
13	Целевая функция (min)	8	3	3,5	2		**194,8**		
14									
15									
16									
17									
18									

Лист1 Лист2 Лист3

Готово 116%

Рис. 4. Экономико-математическая модель расчета оптимального рациона минимальной стоимости с результатами решения

В ячейках B3:F3 получены значения искомых неизвестных переменных (концентраты – 10 ц, сено – 8,5 ц и т. д.). Себестоимость рациона составит 194,8 усл. д. ед.

Задание для самостоятельного выполнения

Определить оптимальный суточный рацион минимальной стоимости для одной коровы с учетом того, что ежедневный удой требует расхода не менее 13 кг к. ед.

Сбалансированный рацион требует, чтобы переваримого протеина было не менее (1330 + №) г на 1 корову (№ – порядковый номер студента в списке подгруппы). Зоотехнические нормы кормления предусматривают, что питательность сена составляет 60 % в группе грубых кормов (солома, сено, сенаж). Кроме того, в рационе должно быть: комбикорма – не менее 3 кг, соломы – не более 6 кг, сенажа – в пределах от 2 до 7 кг. Рацион составляется на базе кормов: комбикорм, силос, корнеплоды, солома, сено, сенаж.

Данные о содержании питательных веществ в 1 кг корма и их стоимости приведены в таблице.

Таблица

Исходные данные

Показатель	Содержание в 1 кг корма		Стоимость 1 кг корма, усл. д. ед.
	кормовых единиц, кг	переваримого протеина, г	
Комбикорм	1,00	125	0,60 + №
Силос	0,19	15	0,20 + №
Корнеплоды	0,13	10	0,10 + №
Солома	0,25	12	0,02 + №
Сено	0,48	49	0,30 + №
Сенаж	0,28	29	0,15 + №

По данным таблицы составить развернутую модель, ввести матрицу в Excel, произвести расчет и проанализировать полученные результаты.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения об этапах реализации экономико-математической модели.
3. Краткое описание порядка формирования матрицы экономико-математической задачи.
4. Анализ полученных результатов решения экономико-математической задачи в среде Microsoft Excel.
5. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие преобразования необходимо выполнить в ограничениях перед записью информации в матрицу?
2. Какой инструмент используют для заполнения экономико-математической модели?
3. Каким образом можно вывести результаты решенной задачи на экран?
4. Для чего используется отчет «Устойчивость»?
5. Для чего используется отчет «Пределы»?

Практическое занятие № 5

ФОРМИРОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРМОВ

***Цель занятия*:** овладеть приемами составления развернутой модели задачи.

Теоретические сведения

Необходимо обеспечить наиболее рациональное распределение запасов корма между половозрастными группами и видами скота с одновременным определением рационов каждой группы. При этом нужно знать, какие корма следует докупать или продавать, а также сколько кормодней целесообразно содержать животных для получения максимального количества продукции животноводства.

Структурная ЭММ использования кормов содержит следующие условные обозначения:

– *индексация*:

j – номер вида, половозрастной группы;

J_0 – множество видов, половозрастных групп животных;

h – номер корма;

H_0 – множество видов кормов;

H_1 – множество покупных кормов, $H_1 \in H_0$;

H_2 – множество кормов в обмен, $H_2 \in H_0$;

H_3 – множество кормов от обмена, $H_3 \in H_0$;

i – номер питательного вещества;

I_0 – множество питательных веществ;

– *неизвестные*:

x_j – поголовье вида, половозрастной группы j;

x_{hj} – скользящая переменная группы h на всю отрасль вида, половозрастной группы j;

x_h – объем покупок корма h;

$\tilde{x}_h$ – объем h в обмен;

$\tilde{\tilde{x}}_h$ – объем h от обмена;

– *известные*:

$\tilde{A}_j$, A_j – соответственно минимальное и максимальное поголовье вида, половозрастной группы j;

D_h – ресурсы корма h, подлежащие распределению;

B_h – максимальный объем покупки корма h;

$\tilde{B}_h$ – максимальный объем корма h на обмен;

$\tilde{\tilde{B}}_h$ – максимальный объем корма h от обмена;

$w_{h_j}^{\min}$, $w_{h_j}^{\max}$ – соответственно минимальная и максимальная нормы скармливания корма h на единицу j вида, половозрастной группы животных;

k_{ih} – содержание питательного вещества i в единице h корма;

f_h – коэффициент обмена корма h на другой корм;

c_h – стоимость покупки единицы корма h;

$\tilde{c}_h$ – цена реализации корма h на обмен;

$\tilde{\tilde{c}}_h$ – стоимость единицы корма h от обмена;

λ_j – стоимость продукции, получаемой от единицы вида, половозрастной группы j;

d_{ij} – норма расхода питательного вещества i на 1 голову вида, половозрастной группы j.

Требуется найти x_j, x_{hj}, x_h, $\tilde{x}_h$, $\tilde{\tilde{x}}_h \geq 0$ при следующих условиях:

1) ограничение по поголовью видов, половозрастных групп животных:

$$\tilde{A}_j \leq x_j \leq A_j,\ j \in J_0;$$

2) ограничение по балансу отдельных видов кормов:

$$\sum_{j \in J_0} w_{h_j}^{\min} + \sum_{j \in J_0} x_{h_j} \leq D_h + x_h + \tilde{\tilde{x}}_h - \tilde{x}_h,\ h \in H_0;$$

3) ограничение по скользящей переменной:

$$x_{h_j} \leq (w_{h_j}^{\max} - w_{h_j}^{\min}) x_j,\ h \in H_0,\ j \in J_0;$$

4) ограничение на покупку кормов:

$$x_h \leq B_h,\ h \in H_1;$$

5) ограничение на корма в обмен:

$$\tilde{x}_h \le \tilde{B}_h, h \in H_2;$$

6) ограничение на корма от обмена:

$$\tilde{\tilde{x}}_h \le \tilde{\tilde{B}}_h, h \in H_3;$$

7) ограничение по условиям обмена кормов:

$$\tilde{x}_h = f_h \tilde{\tilde{x}}_h, h \in H_2 \ (h \in H_3);$$

8) ограничение по балансу питательных веществ:

$$\sum_{j \in J_0} d_{ij} x_j \le \sum_{h \in H_0} D_h k_{ih} + \sum_{h \in H_1} k_{ih} x_h + \sum_{h \in H_3} k_{ih} \tilde{\tilde{x}}_h - \sum_{h \in H_2} k_{ih} \tilde{x}_h, i \in I_0;$$

9) ограничение по содержанию питательных веществ в дополнительных кормах:

$$(d_{ij} - \sum_{h \in H_0} w_{h_j}^{\min} k_{ih}) x_j \le \sum_{h \in H_0} x_{h_j} k_{ih}, j \in J_0, i \in I_0.$$

Целевая функция

$$F_{\max} = \sum_{j \in J_0} \lambda_j x_j - \sum_{h \in H_1} c_h x_h + \sum_{h \in H_2} \tilde{c}_h \tilde{x}_h - \sum_{h \in H_3} \tilde{\tilde{c}}_h \tilde{\tilde{x}}_h.$$

Методика выполнения работы

Задача. На основе структурной модели составить развернутую модель оптимального использования кормов в зимнестойловый период. Цель – максимум стоимости валовой продукции.

Ресурсы кормов (ц): концентраты – 3200; сено – 8000; солома – 3000. Поголовье скота на начало зимовки (гол.): коровы – 280, молодняк КРС – 330. Выход телят на одну корову – 0,6 гол. В течении стойлового периода поголовье коров может быть увеличено на 30 гол. Планируется покупка телят от 20 до 60 гол. весом 50 кг, цена за 1 кг веса – 6 усл. д. ед. Предельные нормы скармливания приведены в табл. 1.

Таблица 1

Предельные нормы скармливания

Вид корма	На 1 корову		На 1 голову молодняка КРС	
	Минимальная норма	Максимальная норма	Минимальная норма	Максимальная норма
Концентраты	5	6	3	5
Сено	12	18	5	9
Солома	3	6	3	5

Продуктивность за стойловый период: коровы – 20, молодняк КРС – 1,6. Расход кормовых единиц на 1 корову – 22, на 1 гол. молодняка КРС – 10 ц к. ед. В оптимальном кормовом рационе коров на 1 к. ед. должно приходиться 0,105 ц переваримого протеина, а в рационе молодняка КРС – 0,101.

Возможен обмен сена на концентраты. Максимальное количество концентратов от обмена – 200 ц, цена – 18 усл. д. ед. За 1 ц концентратов надо отдать 3,6 ц сена по цене 7 усл. д. ед.

Необходимая справочная информация приведена в табл. 2.

Таблица 2

Содержание кормовых единиц и переваримого протеина в 1 ц корма

Вид корма	Кормовые единицы	Переваримый протеин
Концентраты	1,00	0,105
Сено	0,45	0,053
Солома	0,25	0,011
Силос	0,20	0,014
Сенаж	0,28	0,033
Корнеплоды	0,12	0,009

Реализационная цена за 1 ц молока – 35 усл. д. ед., за 1 ц привеса молодняка КРС – 500 усл. д. ед.

Решение

1. Ввести неизвестные величины:

x_1 – количество коров;

x_2 – количество молодняка КРС;

x_3 – покупка телят;

x_4 – добавка концентратов для коров;

x_5 – добавка сена для коров;

x_6 – добавка соломы для коров;

x_7 – добавка концентратов для молодняка КРС;
x_8 – добавка сена для молодняка КРС;
x_9 – добавка соломы для молодняка КРС;
x_{10} – концентраты от обмена;
x_{11} – сено на обмен.

2. Ограничение по поголовью:
– коров:
минимум: $x_1 \geq 280$;
максимум: $x_1 \leq 310$;
– молодняка КРС: $x_2 = 330 + 0{,}6x_1 / 2 + 0{,}6x_3 / 2$.

3. Ограничение по балансу отдельных видов кормов:
– концентратов: $5x_1 + x_4 + 3x_2 + x_7 \leq 3200 + x_{10}$;
– сена: $12x_1 + x_5 + 5x_2 + x_8 \leq 8000 - x_{11}$;
– соломы: $3x_1 + x_6 + 3x_2 + x_9 \leq 3000$.

4. Ограничение по величине добавки:
– концентратов для коров: $x_4 \leq (6 - 5)\, x_1$;
– сена для коров: $x_5 \leq (18 - 12)\, x_1$;
– соломы для коров: $x_6 \leq (6 - 3)\, x_1$;
– концентратов для молодняка КРС: $x_7 \leq (5 - 3)\, x_2$;
– сена для молодняка КРС: $x_8 \leq (18 - 12)\, x_2$;
– соломы для молодняка КРС: $x_9 \leq (6 - 3)\, x_2$.

5. Ограничение на покупку кормов: в задаче отсутствует.

6. Ограничение на корма в обмен: в задаче отсутствует.

7. Ограничение на корма от обмена (концентраты): $x_{10} \leq 200$.

8. Ограничение по условиям обмена кормов: $x_{10} = x_{11} / 3{,}6$.

9. Ограничения по балансу питательных веществ:
– кормовых единиц:

$$22x_1 + 10x_2 \leq (3200 + x_{10}) \cdot 1 + (8000 - x_{11}) \cdot 0{,}45 + 3000 \cdot 0{,}25;$$

– переваримого протеина:

$$0{,}105 \cdot 22x_1 + 0{,}101 \cdot 10x_2 \leq (3200 + x_{10}) \cdot 0{,}105 + \\ + (8000 - x_{11}) \cdot 0{,}053 + 3000 \cdot 0{,}011.$$

10. По содержанию питательных веществ в дополнительных кормах:

– по содержанию кормовых единиц в дополнительных кормах для коров:

$$(22 - (5 \cdot 1 + 12 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot 0{,}25))\, x_1 \leq x_4 + 0{,}045x_5 + 0{,}25x_6;$$

– по содержанию переваримого протеина в дополнительных кормах для коров:

$$(0{,}105 \cdot 22 - (5 \cdot 0{,}105 + 12 \cdot 0{,}053 + \\ + 3 \cdot 0{,}011))\, x_1 \le 0{,}105x_4 + 0{,}0053x_5 + 0{,}011x_6;$$

– по содержанию кормовых единиц в дополнительных кормах для молодняка КРС:

$$(10 - (3 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot 0{,}25))\, x_2 \le x_7 + 0{,}045x_8 + 0{,}25x_9;$$

– по содержанию переваримого протеина в дополнительных кормах для молодняка КРС:

$$(0{,}101 \cdot 10 - (3 \cdot 0{,}105 + 5 \cdot 0{,}053 + \\ + 3 \cdot 0{,}011))\, x_2 \le 0{,}105x_7 + 0{,}0053x_8 + 0{,}011x_9.$$

11. Все переменные неотрицательны.

12. Целевая функция

$$F_{\max} = 35 \cdot 20x_1 + 500 \cdot 1{,}6x_2 - 6 \cdot 50x_3 - 18x_{10} + 7x_{11}.$$

Задание для самостоятельного выполнения

На основании структурной модели задачи использования кормов составить развернутую модель. Цель – максимум стоимости валовой продукции.

В хозяйстве две половозрастные группы: коровы и молодняк крупного рогатого скота. На начало зимовки поголовье: коровы – 200, молодняк КРС – 260 гол. В течение стойлового периода среднее поголовье коров может быть увеличено на 10 гол.

Планируется:

1) равномерное поступление молодняка от других хозяйств. Минимальное количество покупных телят – 50, максимальное – 100 гол. Вес телят при покупке – 50 кг, закупочная цена за 1 кг живого веса – 5 усл. д. ед.;

2) приплод от собственных коров. Выход телят на 1 корову за стойловый период – 0,6 гол.

Наличие кормов на начало зимовки (ц): концентраты – 2000, сенаж – 12 200, силос – 5000, корнеплоды – 3000, сено – 3400, солома – 2000.

Возможна покупка комбикорма в количестве до 200 ц по цене 12 усл. д. ед. за 1 ц.

Возможен обмен сена и сенажа на концентраты. Максимальное количество концентратов от обмена – 100 ц по цене 12,9 усл. д. ед. За 1 ц концентратов нужно отдать 2,2 ц сена или 3,2 ц сенажа. За 1 ц сена хозяйство получит 4,3 усл. д. ед., за 1 ц сенажа – 3,9 усл. д. ед.

Затраты на перевозку 1 ц концентратов (1,7 усл. д. ед.) и 1 ц сена и сенажа (1,8 усл. д. ед.) должны быть учтены в данном хозяйстве, т. к. оно является инициатором обмена.

Продуктивность за стойловый период (ц): коровы – 17,6, молодняк КРС – 1,6. Определен расход кормовых единиц на 1 корову – 23,5, на 1 гол. молодняка КРС – 10,7 ц к. ед.

В оптимальном кормовом рационе коров на 1 к. ед. должно приходиться 0,105 ц переваримого протеина, а в рационе молодняка КРС – 0,101. Предельные нормы скармливания приведены в табл. 3.

Таблица 3

Предельные нормы скармливания

Вид корма	На 1 корову, ц		На 1 голову молодняка КРС, ц	
	Минимальная норма	Максимальная норма	Минимальная норма	Максимальная норма
Концентраты	3,6	5,8	2,5	3,6
Сенаж	20	40	10	35
Силос	10	30	8	20
Сено	8	16	4	10
Солома	4	6	3	5
Корнеплоды	10	40	–	20

Реализационная цена 1 ц молока – 22 усл. д. ед., 1 ц привеса молодняка КРС – 140 усл. д. ед.

Контрольные вопросы

1. Какой критерий оптимальности в задаче использования кормов?
2. Перечислите основные группы ограничения задачи использования кормов.
3. Почему в задаче использования кормов нет ограничения по труду?
4. Каким образом составляются ограничения баланса кормов?
5. Можно ли решать задачу использования кормов на перспективу?

Практическое занятие № 6

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЗАДАЧИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРМОВ

***Цель занятия*:** овладение практическими навыками по составлению матрицы задачи использования кормов для дальнейшего ее использования при решении задачи в Excel.

Теоретические сведения

После составления развернутой экономико-математической модели переходят к формированию матрицы. Прежде чем составлять матрицу задачи, ограничения необходимо преобразовать: выполнить арифметические действия, все неизвестные перенести в левую часть ограничений, а свободные члены – в правую. В результате получают необходимые данные для формирования матрицы.

Методика выполнения работы

Задача. Построить матрицу, используя развернутую экономико-математическую модель, составленную на практическом занятии № 5 «Формирование ограничений экономико-математической задачи использования кормов».

Решение

Для записи информации в матрицу предварительно выполнить необходимые преобразования составленной экономико-математической модели использования кормов, после чего она примет следующий вид:

1. Ограничение по поголовью:

– коров:

минимум: $x_1 \geq 280$;

максимум: $x_1 \leq 310$;

– молодняка КРС: $x_2 - 0{,}3x_1 - 0{,}3x_3 = 330$.

2. Ограничение по балансу отдельных видов кормов:

– концентратов: $5x_1 + x_4 + 3x_2 + x_7 - x_{10} \leq 3200$;

– сена: $12x_1 + x_5 + 5x_2 + x_8 + x_{11} \leq 8000$;

– соломы: $3x_1 + x_6 + 3x_2 + x_9 \leq 3000$.

3. Ограничение по величине добавки:

– концентратов для коров: $x_4 - x_1 \le 0$;

– сена для коров: $x_5 - 6x_1 \le 0$;

– соломы для коров: $x_6 - 3x_1 \le 0$;

– концентратов для молодняка КРС: $x_7 - 2x_2 \le 0$;

– сена для молодняка КРС: $x_8 - 6x_2 \le 0$;

– соломы для молодняка КРС: $x_9 - 3x_2 \le 0$.

4. Ограничение на покупку кормов: в задаче отсутствует.

5. Ограничение на корма в обмен: в задаче отсутствует.

6. Ограничение на корма от обмена (концентраты): $x_{10} \le 200$.

7. Ограничение по условиям обмена кормов: $x_{10} - 0{,}28x_{11} = 0$.

8. Ограничения по балансу питательных веществ:

– кормовых единиц: $22x_1 + 10x_2 - x_{10} + 0{,}45x_{11} \le 7550$;

– переваримого протеина: $2{,}31x_1 + 1{,}01x_2 - 0{,}105x_{10} + 0{,}053x_{11} \le 4609$.

9. Ограничения по содержанию питательных веществ в дополнительных кормах:

– по содержанию кормовых единиц в дополнительных кормах для коров:

$$10{,}85x_1 - x_4 - 0{,}045x_5 - 0{,}25x_6 \le 0;$$

– по содержанию переваримого протеина в дополнительных кормах для коров:

$$1{,}116x_1 - 0{,}105x_4 - 0{,}053x_5 - 0{,}011x_6 \le 0;$$

– по содержанию кормовых единиц в дополнительных кормах для молодняка КРС:

$$4x_2 - x_7 - 0{,}045x_8 - 0{,}25x_9 \le 0;$$

– по содержанию переваримого протеина в дополнительных кормах для молодняка КРС:

$$0{,}397x_2 - 0{,}105x_7 - 0{,}053x_8 - 0{,}011x_9 \le 0.$$

10. Все переменные неотрицательны.

11. Целевая функция

$$F_{\max} = 700x_1 + 800x_2 - 300x_3 - 18x_{10} + 7x_{11}.$$

Полученные данные заносятся в таблицу.

Таблица

Пример таблицы для ввода данных задачи использования кормов

Вид ограничения	Неизвестные переменные											Знак ограничения	Величина ограничения
	x_1 – количество коров	x_2 – количество молодняка КРС	x_3 – покупка телят	x_4 – добавка концентратов для коров	x_5 – добавка сена для коров	x_6 – добавка соломы для коров	x_7 – добавка концентратов для молодняка КРС	x_8 – добавка сена для молодняка КРС	x_9 – добавка соломы для молодняка КРС	x_{10} – концентраты от обмена	x_{11} – сено на обмен		
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
По поголовью коров, минимум	1											≥	280
По поголовью коров, максимум	1											≤	310
По поголовью молодняка КРС	–0,3	1	–0,3									=	330
По балансу концентратов	5	3		1			1			–1		≤	3200
По балансу сена	12	5			1			1			1	≤	8000
По балансу соломы	3	3				1			1			≤	3000
По добавкам концентратов для коров	–1			1								≤	0
По добавкам сена для коров	–6				1							≤	0
По добавкам соломы для коров	–3					1						≤	0
По добавкам концентратов для молодняка КРС		–2					1					≤	0

Окончание таблицы

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*
По добавкам сена для молодняка КРС		–6						1				≤	0
По добавкам соломы для молодняка КРС		–3							1			≤	0
По концентратам от обмена										1		≤	200
По условиям обмена кормов										1	–0,28	=	0
По балансу кормовых единиц	22	10								–1	0,45	≤	7550
По балансу переваримого протеина	2,31	1,01								–0,105	0,053	≤	4609
По содержанию кормовых единиц в дополнительных кормах для коров	10,85			–1	–0,045	–0,25						≤	0
По содержанию переваримого протеина в дополнительных кормах для коров	1,11			–0,105	–0,053	–0,011						≤	0
По содержанию кормовых единиц в дополнительных кормах для молодняка КРС		4					–1	–0,045	–0,25			≤	0
По содержанию переваримого протеина в дополнительных кормах для молодняка КРС		0,397					–0,105	–0,053	–0,011			≤	0
Целевая функция	700	800	–300							–18	7		

Задание для самостоятельного выполнения

Сформировать матрицу задачи на основании развернутой модели задачи использования кормов, составленную на практическом занятии № 5 «Формирование ограничений экономико-математической задачи использования кормов».

Контрольные вопросы

1. Какие преобразования выполняют перед составлением матрицы задачи?
2. Каким образом составляют ограничения по содержанию питательных веществ в дополнительных кормах?
3. В каком случае используется только минимальная норма корма?
4. Как определяют нижнюю границу поголовья животных на зимовке?
5. Какие каналы поступления животных возможны во время зимовки?

Лабораторная работа № 14

РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ЗАДАЧИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРМОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

***Цель работы*:** овладеть практическими навыками расчета экономико-математических задач в Excel.

Методика выполнения работы

Задача. На основе матрицы задачи использования кормов, составленной на практическом занятии № 6 «Формирование матрицы задачи использования кормов», произвести в Excel расчет оптимального рациона кормления животного минимальной стоимости.

Решение

Матрица оптимизации использования кормов переносится на лист файла Excel (рис.).

Технико-экономические коэффициенты и оценки целевой функции – столбцы B…L, объемы ограничений – столбец N.

Для искомых величин переменных $x_1 \ldots x_{11}$ оставляются пустые ячейки – B3…L3 соответственно.

Столбец M (сумма произведений) предназначен для определения суммы произведений значений искомых неизвестных (ячейки B3…L3) и технико-экономических коэффициентов по соответствующим ограничениям (строк 4…23) и целевой функции (строка 24).

Для расчета наиболее рационального распределения запасов корма между половозрастными группами и видами скота с одновременным определением рациона каждой группы при максимальной стоимости товарной продукции необходимо воспользоваться инструментом «Поиск решения» (см. лабораторную работу № 13).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Вид ограничения	Неизвестные переменные											Знак ограничения	Величина ограничения
2		x1 – количество коров	x2 – количество молодняка КРС	x3 – покупка телят	x4 – добавка концентратов для коров	x5 – добавка сена для коров	x6 – добавка соломы для коров	x7 – добавка концентратов для молодняка КРС	x8 – добавка сена для молодняка КРС	x9 – добавка соломы для молодняка КРС	x10 – концентраты от обмена	x11 – сено на обмен		
3														
4	По поголовью коров, минимум	1											≥	280
5	По поголовью коров, максимум	1											≤	310
6	По поголовью молодняка КРС	-0,3	1	-0,3									=	330
7	По баланс концентратов	5	3		1			1			-1		≤	3200
8	По баланс сена	12	5			1			1			1	≤	8000
9	По баланс соломы	3	3				1			1			≤	3000
10	По добавкам концентратов для коров	-1			1								≤	0
11	По добавкам сена для коров	-6				1							≤	0
12	По добавкам соломы для коров	-3					1						≤	0
13	По добавкам концентратов для молодняка КРС		-2					1					≤	0
14	По добавкам сена для молодняка КРС		-6						1				≤	0
15	По добавкам соломы для молодняка КРС		-3							1			≤	0
16	По концентратам от обмена										1		≤	200
17	По условиям обмена кормов										1	-0,28	=	0
18	По балансу кормовых единиц	22	10								-1	0,45	≤	7550
19	По балансу переваримого протеина	2,31	1,01								-0,105	0,053	≤	4609
20	По содержанию КЕ в дополнительных кормах для коров	10,85			-1	-0,045	-0,25						≤	0
21	По содержанию ПП в дополнительных кормах для коров	1,11			-0,105	-0,053	-0,011						≤	0
22	По содержанию КЕ в дополнительных кормах для молодняка КРС		4					-1	-0,045	-0,25			≤	0
23	По содержанию ПП в дополнительных кормах для молодняка КРС		0,397					-0,105	-0,053	-0,011			≤	0
24	*Целевая функция:*	700	800	-300							-18	7		

Рис. Экономико-математическая модель расчета оптимального рациона минимальной стоимости с результатами решения

Задание для самостоятельного выполнения

На основе сформированной матрицы задачи использования кормов, составленной на практическом занятии № 6 «Формирование матрицы задачи использования кормов», наиболее рационально распределить запасы корма между половозрастными группами и видами скота и определить рацион каждой группы с помощью надстройки Excel «Поиск решения». Проанализировать полученные результаты.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Общие сведения о задаче использования кормов сельскохозяйственной организации.
3. Краткое описание методики выполнения работы с конкретными количественными результатами по своему варианту.
4. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Для каких целей предназначены ячейки B3…L3?
2. Для каких целей используется столбец M?
3. Каким образом в матрицу заносят знаки ограничения задачи?
4. В какой ячейке получают значение целевой функции задачи?
5. Каким образом вызвать значения переменных, используя отчеты «Поиск решения»?

Практическое занятие № 7

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

***Цель занятия*:** овладеть приемами принятия решений с использованием теории статистических игр.

Теоретические сведения

Когда выигрыш одного игрока равен проигрышу другого, такие игры называются *играми с нулевой суммой*.

Чтобы описать матричную игру с нулевой суммой, необходимо перечислить все возможные стратегии каждой из сторон и определить результат игры для каждой пары таких стратегий. Обозначим наши возможные стратегии A_1, A_2, …, A_m, стратегии оппонента – B_1, B_2, …, B_n. Если мы применим стратегию A_i, а оппонент – стратегию B_j, то результатом такого решения будет наш выигрыш a_{ij}. Для оппонента величина a_{ij} станет проигрышем. В случае же нашего проигрыша значение a_{ij} будет для нас отрицательным.

Пусть платежная матрица имеет вид табл. 1.

Таблица 1

Платежная матрица игры с нулевой суммой

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B					
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	4	5	5	6	6	4
A_2	7	9	3	–3	4	7
A_3	5	3	3	1	4	5
A_4	3	4	3	6	–6	3

Сначала необходимо определить, какой выигрыш гарантирует нам каждая из стратегий при самых неблагоприятных действиях оппонента. В каждой строке нужно найти минимальное значение $a_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,4}$.

Поскольку оппонент может провести такой же анализ для выбора одной из стратегий B_j, $j = \overline{1, n}$, то в каждом столбце он будет искать максимально возможные значения нашего выигрыша $b_j = \max\limits_i a_{ij}$, $j = \overline{1,6}$.

Выбор стратегии A_1 гарантирует нам выигрыш не менее 4 при любой стратегии оппонента. Она максимизирует наш минимальный выигрыш, и ее принято называть *максиминной*. Соответствующее ей значение $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ – *нижняя цена игры*.

Для оппонента стратегия B_j минимизирует максимально возможный проигрыш и называется *минимаксной*.

Если игра проводится однократно и нет обоснованных предположений о действиях другой стороны, то нам логично использовать максиминную стратегию A_1, а оппоненту – минимаксную стратегию B_3. Но при многократном повторении игры оппонент, убедившись в предсказуемости нашего поведения, может уменьшить проигрыш, применив стратегию B_1 (табл. 2).

Таблица 2

Максиминная и минимаксная стратегии

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B						a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	**4**	**5**	**5**	**6**	**6**	**4**	**4**
A_2	7	9	**3**	–3	4	7	–3
A_3	5	3	**3**	1	4	5	1
A_4	3	4	**3**	6	–6	3	–6
b_j	7	9	**5**	6	6	7	–

Нужно определиться, во-первых, какие стратегии и как часто надо использовать, во-вторых – в каком порядке их чередовать. Каждой доступной стратегии можно приписать определенную вероятность ее использования, а сам выбор доверить случаю. Такие стратегии в теории игр называются *смешанными* и записываются для нас и для оппонента соответственно как векторы $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, где $p_i \geq 0$, $q_j \geq 0$ – вероятности применения чистых стратегий A_i, $i = \overline{1, m}$ и B_j, $j = \overline{1, n}$.

Поскольку в каждой партии выбирается только одна стратегия, то всегда $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Игроки выбирают свои чистые стратегии независимо и случайно, поэтому средняя величина выигрыша (для оппонента – проигрыша) является функцией смешанных стратегий – *платежной функцией* игры:

$$f(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \cdot$$

Для оптимальных смешанных стратегий p^* и q^* значение платежной функции – цена игры $\gamma = f(p^*, q^*)$. Справедливы неравенства

$$f(p, q^*) \le f(p^*, q^*) \le f(p^*, q).$$

Определение искомых стратегий можно упростить, если удастся уменьшить размерность матрицы, исключая стратегии, которые сторонам невыгодны или не нужны. Так, для рассматриваемого примера стратегии B_1 и B_6 полностью совпадают, т. е. *дублируют* одна другую, поэтому одну из них можно исключить. Сравнивая между собой наши стратегии, можно сделать вывод, что при любой стратегии оппонента выигрыш при использовании A_1 больше, чем выигрыш при использовании A_4, или равен ему. В этом случае говорят, что стратегия A_1 *доминирует* над A_4, и исключают последнюю (табл. 3).

Таблица 3

Платежная матрица после исключения стратегий A_4 и B_6

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B					a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	5	6	6	4
A_2	7	9	3	–3	4	–1
A_3	5	3	3	1	4	1
b_j	7	9	5	6	6	–

Из наших стратегий исключить пока нельзя ни одну, но у оппонента стратегия B_3 доминирует над стратегиями B_2 и B_5. Результат исключения этих стратегий представлен на табл. 4.

Таблица 4

Платежная матрица после исключения стратегий B_2 и B_5

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			a_i
	B_1	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	4
A_2	7	3	–3	–1
A_3	5	3	1	1
b_j	7	5	6	–

Если удастся найти такую линейную комбинацию стратегий, которая даст результат лучше, чем одна из оставшихся, или такой же, то ее можно исключить. Против стратегии B_1 лучше всего A_2, против стратегий B_3 и B_4 – только A_1. Линейная комбинация двух наших первых стратегий с весовыми коэффициентами, равными, например, по $^1/_2$ (сумма таких коэффициентов – всегда единица), даст математическое ожидание выигрыша для каждой стратегии оппонента не хуже, чем A_3, следовательно эта стратегия не нужна (табл. 5).

Таблица 5

Линейная комбинация A_1 и A_2

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B		
	B_1	B_3	B_4
A_1	4	5	6
A_2	7	3	–3
Линейная комбинация A_1 и A_2	$\frac{4+7}{2}=5,5$	$\frac{5+3}{2}=4$	$\frac{6-3}{2}=1,5$
A_3	5	3	1

Чтобы противостоять стратегии A_1, оппоненту нужна B_1, а против A_2 он использует B_4 и реализует свой шанс на выигрыш. При равновероятном использовании этих стратегий результат для него будет лучше, чем при использовании B_3 (табл. 6).

Таблица 6

Линейная комбинация B_1 и B_4

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			Линейная комбинация
	B_1	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	$\frac{4+6}{2}=5$
A_2	7	3	–3	$\frac{7-3}{2}=2$

Стратегии A_2 и B_4, очевидно, будут использоваться с вероятностями $(1-p)$ и $(1-q)$ соответственно, что удобно записать в следующем виде:

	B_1	B_4	
A_1	4	6	p
A_2	7	–3	$1-p$
	q	$1-q$	

Рис. 1. Вероятности применения стратегий

Тогда платежная функция

$$f(p, q) = 4pq + 6p(1 - q) + 7(1 - p)q - 3(1 - p)(1 - q).$$

Максимальный выигрыш для нас и минимальный проигрыш для оппонента (искомые экстремумы) можно найти, приравнивая к нулю ее частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 4q + 6(1-q) - 7q + 3(1-q);$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 4p - 6p + 7(1-p) + 3(1-p).$$

Далее

$$9(1 - q) - 3q = 0 \to 9 = 12q \to q = {}^{3}/_{4};$$

$$10(1 - p) - 2p = 0 \to 10 = 12p \to p = {}^{5}/_{6}.$$

Оптимальные стратегии сторон:

$$p^* = ({}^{5}/_{6}, {}^{1}/_{6}, 0, 0) \text{ и } q^* = ({}^{3}/_{4}, 0, 0, {}^{1}/_{4}, 0, 0).$$

В рассмотренном частном случае минимаксная стратегия оппонента B_3 не используется (имеет нулевую вероятность) в его смешанной стратегии.

Методика выполнения работы

Задача. Две внешнеторговые фирмы занимаются реализацией вакцины для сельскохозяйственных животных. Фирма A рекламирует продукцию через следующие виды печатной рекламы: буклеты A_1, каталоги A_2 и проспекты A_3. Фирма B в дополнение к использованию буклетов B_1, каталогов B_2 и проспектов B_3 рассылает также информационные письма B_4. В зависимости от деятельности маркетинговых отделов каждая из фирм может привлечь на свою сторону часть покупателей конкурирующей фирмы. Приведенная на табл. 7 матрица характеризует процент покупателей, привлеченных или потерянных фирмой A.

Таблица 7

Исходные данные

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	2	2	0
A_2	8	5	5	1
A_3	1	2	2	2

Найти нижнюю и верхнюю чистые цены, определить минимаксную и максиминную стратегии, выполнить возможные упрощения платежной матрицы и определить смешанные стратегии.

Решение

1. Определить для фирмы A выигрыш, который гарантируется каждой из стратегий при самых неблагоприятных действиях оппонента.

2. Поскольку оппонент может провести такой же анализ для выбора одной из стратегий, найти в каждом столбце максимально возможные значения нашего выигрыша (табл. 8).

Таблица 8

Максиминная и минимаксная стратегии решаемой задачи

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B				$\min a_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	2	0	0
A_2	8	5	5	1	1
A_3	1	2	2	2	1
$\max a_{ij}$	8	5	5	2	–

Выбор стратегии A_2 или A_3 гарантирует фирме A выигрыш не менее 1 при любой стратегии оппонента. Это максиминные стратегии. Нижняя цена игры равна 1.

Для оппонента стратегия B_4 минимизирует максимально возможный проигрыш и называется минимаксной. Используя ее, оппонент не может проиграть больше верхней цены игры, равной 2.

3. Проанализировать матрицу на предмет выявления дублирующих и доминирующих стратегий, провести упрощение матрицы.

Стратегия B_2 дублирует стратегию B_3, поэтому последняя исключается (табл. 9).

Таблица 9

Упрощение матрицы

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			min a_{ij}
	B_1	B_2	B_4	
A_1	4	2	0	0
A_2	8	5	1	1
A_3	1	2	2	1
max a_{ij}	8	5	2	–

Применение стратегии B_4 минимизирует проигрыш фирмы B по сравнению со стратегией B_2 (табл. 10).

Таблица 10

Дальнейшее упрощение матрицы

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B		min a_{ij}
	B_1	B_4	
A_1	4	0	0
A_2	8	1	1
A_3	1	2	1
max a_{ij}	8	2	–

Стратегия A_2 доминирует над стратегией A_1 (рис. 2).

	B_1	B_4	
A_2	8	1	p
A_3	1	2	$1 - p$
	q	$1 - q$	

Рис. 2. Вероятности применения стратегий для решаемой задачи

4. Записать платежную функцию:

$$f(p, q) = 8pq + p(1 - q) + 1(1 - p)q + 2(1 - p)(1 - q).$$

5. Определить производные:

$$\partial f / \partial p = 8q + 1(1 - q) - q - 2(1 - q);$$

$$\partial f / \partial q = 8p - p + 1(1 - p) - 2(1 - p).$$

6. Приравнять уравнение к нулю и решить уравнения:

$$p = {}^{1}/_{8};$$

$$q = {}^{1}/_{8}.$$

Оптимальные стратегии сторон:

$$P^* = (0, {}^1/_8, {}^7/_8, 0);$$

$$Q^* = ({}^1/_8, 0, 0, {}^7/_8).$$

Задание для самостоятельного выполнения

Найти нижнюю и верхнюю чистые цены, определить минимаксную и максиминную стратегии, выполнить возможные упрощения платежной матрицы и определить смешанные стратегии.

Вариант 1

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	2	2	0
A_2	8	5	5	1
A_3	1	2	2	2

Вариант 2

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	5	0	5
A_2	–7	3	2	3
A_3	1	–1	–4	1

Вариант 3

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	–1	1	–1	–2
A_2	10	8	6	1
A_3	–6	0	1	5

Вариант 4

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	1	2
A_2	7	4	1	6
A_3	–2	6	2	0

Вариант 5

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	2	1
A_2	–4	–2	0	3
A_3	4	5	–2	7

Вариант 6

Стратегия игрока A	Стратегии игрока B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	11	9	3	7
A_2	7	7	–4	2
A_3	4	8	6	5

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия максиминной стратегии.
2. Дайте определение понятия минимаксной стратегии.
3. Как определить нижнюю и верхнюю цену игры?
4. В чем состоит понятие доминирующей стратегии?
5. Как применить смешанные стратегии?

Практическое занятие № 8

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

***Цель занятия*:** овладеть приемами принятия решений с использованием теории статистических игр.

Теоретические сведения

Чаще всего при решении экономических задач в АПК существует проблема выбора оптимального решения в условиях неопределенности. Моделируется игровая схема, где неизвестно поведение противоположной стороны под влиянием случайных факторов. Такие модели называют играми с природой, или статистическими играми. При работе с моделью статистических решений необходимо учитывать несколько особенностей:

1. Имеется m возможных линий поведения (стратегий) лица, принимающего решения (ЛПР), как сознательного игрока A, т. е. $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

2. Природа обладает множеством состояний П, т. е. $П_1, П_2, \ldots, П_n$. Из прежнего опыта ЛПР могут быть известны возможные состояния природы, а также вероятности Q_j, с которыми природа их реализует.

3. Если лицо, принимающее решения, имеет возможность оценить последствия применения каждой своей стратегии A_i в зависимости от любого состояния $П_j$ природы, то статистическую игру можно задать платежной матрицей (табл. 1).

Таблица 1

Платежная матрица

Стратегия игрока A	Состояния природы			
	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_1	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Сформулирован ряд критериев, которые реализуют логическую схему принятия решения.

Максиминный критерий Вальда $\max\limits_i(\min\limits_j a_{ij})$ основан на консервативном осторожном поведении лица, принимающего решения, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших.

Максимаксный критерий $\max\limits_i(\max\limits_j a_{ij})$ – выбор стратегии, при которой возможно получение максимального выигрыша.

Критерий Гурвица – промежуточный выбор между минимаксным и максиминным критериями. Стратегия выбирается в соответствии со значением

$$\max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}),$$

где λ – коэффициент пессимизма ($0 \le \lambda \le 1$). При крайних значениях этого коэффициента получают соответственно минимаксный и максимаксный критерии. При использовании этого критерия часто принимают значение параметра $\lambda = 0{,}5$ или $\lambda = 0{,}6$.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Строится матрица рисков, элементы которой – разности между максимально возможным выигрышем при j-м состоянии природы и выигрышем при использовании нами i-й стратегии. Выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях. Это также крайний пессимизм, но по отношению к величине риска.

Если известны вероятности состояний природы q_j, $j = \overline{1,n}$, то пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш $\max \overline{a_i}$, где $\overline{a_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$.

Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, можно принять их равными, полагая, что $q_j = {}^1/_n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*.

Методика выполнения работы

Задача. Сельскохозяйственное предприятие должно принять один из четырех производственных планов по выращиванию сельскохозяйственной продукции. Прибыль (тыс. усл. д. ед.), указанная в таблице, зависит от того, каким будет лето: дождливым ($П_1$), жарким ($П_2$) или умеренным ($П_3$). Вероятность наступления дождливого, жаркого или умеренного лета взята из статистических данных наблюдения за погодой (табл. 2).

Таблица 2

Исходные данные

Стратегия игрока A	Состояния природы		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	5	1	8
A_2	3	5	4
A_3	6	2	4
A_4	2	7	6
q	0,3	0,4	0,3

Определить наилучшую стратегию по критерию Вальда, максимаксному критерию, критерию Гурвица, критерию Сэвиджа, критерию Байеса и принципу недостаточного основания Лапласа.

При выполнении задания произвести расчеты по заданным формулам с численной проверкой решения.

Решение

1. Критерий Вальда: оптимальна стратегия A_2.
2. Максимаксный критерий: оптимальна стратегия A_1.
3. Критерий Гурвица: при $\lambda = 0{,}5$ оптимальны стратегии A_1 и A_4, при $\lambda = 0{,}6$ (более пессимистическом подходе) – A_4 (табл. 3).

Таблица 3

Результаты расчетов

Стратегия игрока A	Состояния природы			$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу при $\lambda = 0{,}5$	По Гурвицу при $\lambda = 0{,}6$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$				
A_1	5	1	8	1	**8**	**4,5**	3,8
A_2	3	5	4	**3**	5	4	3,8
A_3	6	2	4	2	6	4	3,6
A_4	2	7	6	2	7	**4,5**	**4**
q	0,3	0,4	0,3				

4. Критерий Сэвиджа. Строится матрица рисков, для этого по каждому столбцу определяется максимум и значение элемента матрицы – разность между максимальным и текущим значениями. Оценивается максимальный риск (максимум по каждой строке) и выбирается наименьший – стратегии A_2 и A_4 (табл. 4).

Таблица 4

Матрица рисков

Стратегия игрока A	Состояния природы			$\max\limits_j a_{ij}$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
A_1	1	6	0	6
A_2	3	2	4	**4**
A_3	0	5	4	5
A_4	4	0	2	**4**

5. Критерий Байеса. Рассчитывается для каждой стратегии $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$. Выбирается стратегия A_4 (табл. 5).

Таблица 5

Расчеты по критерию Байеса

Стратегия игрока A	Состояния природы			$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
A_1	5	1	8	4,3
A_2	3	5	4	4,1
A_3	6	2	4	3,8
A_4	2	7	6	**5,2**
q	0,3	0,4	0,3	

6. Принцип недостаточного основания Лапласа. Рассматриваются три возможных состояния природы, следовательно вероятность наступления каждого равна 0,33. Далее расчет аналогичен критерию Байеса. Выбирается стратегия A_4.

7. Стратегия A_3 бесперспективна и может быть исключена из рассмотрения. Согласно полученным расчетам наиболее перспективной будет стратегия A_4.

Задания для самостоятельного выполнения

Определить для каждого задания наилучшую стратегию по критерию Вальда, максимаксному критерию, критерию Гурвица, критерию Сэвиджа, критерию Байеса и принципу недостаточного основания Лапласа.

Задание 1. Фермер может выращивать один из трех сортов моркови. Предполагаемая урожайность каждого сорта зависит от погодных условий. Лето может быть умеренным ($П_1$), жарким ($П_2$) или дождливым ($П_3$). Вероятность наступления умеренного, жаркого или дождливого лета взята из статистических данных наблюдения за погодой и составляет 0,3, 0,4 и 0,2 соответственно (табл. 6).

Таблица 6

Исходные данные задания 1

Сорт моркови	Состояния природы		
	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	266	260	262
A_2	265	268	260
A_3	250	230	285

Задание 2. Перерабатывающее предприятие может принять одну из четырех возможных стратегий развития производства. Эксперты проанализировали пять предполагаемых ситуаций для изменения производственной деятельности предприятия и оценили прибыль для каждой стратегии в баллах. Вероятность наступления каждой ситуации, по их мнению, составляет соответственно 0,2; 0,1; 0,2; 0,1; 0,4 (табл. 7).

Таблица 7

Исходные данные задания 2

Стратегия	Производственные ситуации				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	6	1	13	8	1
A_2	12	0	8	9	6
A_3	10	4	2	15	7
A_4	4	7	8	9	5
q	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4

Задание 3. Завод изучает перспективы производства теплиц. Проект может быть реализован на большой или малой производственной базе. Возможно, заводу невыгодно это производство. При благоприятной рыночной ситуации большое производство позволило бы получить чистую прибыль 200 тыс. усл. д. ед. Если рынок окажется неблагоприятным, то при большом производстве убытки составят 180 тыс. усл. д. ед. Малое производство дает 100 тыс. усл. д. ед. прибыли при благоприятной рыночной ситуации и 20 тыс. усл. д. ед. убытков – при неблагоприятной. Согласно полученным оценкам вероятность наступления благоприятного состояния среды – 0,6.

Какое решение следует принять: создать большую или малую производственную базу либо отказаться от проекта?

Контрольные вопросы

1. Какова суть критерия Вальда и максимаксного критерия?
2. Дайте определение критерия Гурвица.
3. В чем сущность критерия Сэвиджа?
4. Какова суть критерия Байеса?
5. В чем состоит принцип недостаточного основания Лапласа?

Практическое занятие № 9

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ И ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

***Цель занятия*:** овладение приемами расчета критического пути и временных параметров сетевого графика.

Теоретические сведения

Сетевой график можно рассматривать как ориентированный граф (орграф) – конечное непустое множество вершин, часть которых соединена дугами (линиями со стрелками). Обычно при построении сетевых графиков под вершинами орграфа понимают события, а под дугами – выполняемые работы.

Работа – это любое действие, требующее затрат времени и ресурсов. Изображается стрелкой с указанием направления. Рядом со стрелкой записывают числовые характеристики работы.

Событие – состояние проекта, которому соответствует окончание всех входящих в него работ и возможность начала следующих за ним операций. Изображается кружком, в котором может быть записан порядковый номер события, а после расчета – и время его наступления.

Различают три вида событий: *исходное* (то, с которого начинается выполнение комплекса операций), *завершающее* (обозначающее, что конечная цель проекта достигнута) и *промежуточные* (все остальные события).

Построение сетевого графика удобно начинать с составления полного списка операций, которые необходимо выполнить. Порядок операций произвольный, но для каждой операции указываются предшествующие и задается длительность выполнения. Чтобы управлять ходом выполнения работ, представленных сетевой моделью, необходимо знать:

– продолжительность выполнения всего проекта;

– время свершения событий;

– сроки начала и окончания отдельных операций;

– операции, задержки выполнения которых увеличат длительность выполнения всего проекта;

– допустимые задержки для времени выполнения некритических операций, не влияющие на конечный срок проекта.

Путь – последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей.

Длина пути – сумма продолжительности работ, образующих путь.

Полный путь – путь от исходного события к завершающему.

Критический путь – полный путь, имеющий наибольшую продолжительность. Находящиеся на нем операции и события называют критическими и выделяют на графике жирной линией или цветом. Длину критического пути часто называют критическим временем выполнения проекта.

Ранний срок свершения события – срок завершения всех предшествующих j-му событию работ, или, иными словами, самый длинный предшествующий событию путь.

Поздний срок свершения события – такой срок, увеличение которого приведет к увеличению критического времени выполнения проекта.

Резерв времени события – разность между поздним и ранним сроками свершения события. Для критических событий (и только для них) резервы времени равны нулю. Поэтому, если рассчитывать резервы времени для каждого события, то критический путь может проходить только через события с нулевым резервом времени.

Для расчета удобно использовать четырехсекторную схему (рис. 1).

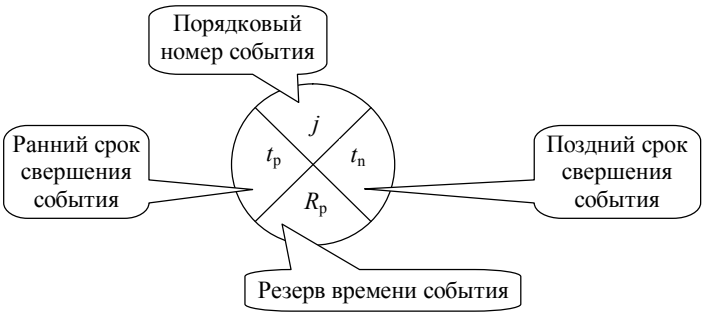


Рис. 1. Четырехсекторная схема

Вычисления выполняются в два прохода. При *проходе вперед* (в порядке возрастания номеров событий) определяется самое раннее время наступления событий. Для исходного события ранний срок можно принять равным нулю. Для j-го события достаточно найти наибольшую сумму ранних сроков наступления каждого предшествующего события и продолжительность операции, связывающей предшествующее событие с j-м.

Второй этап – *проход назад* (в порядке убывания номеров событий) – позволяет определить самые поздние сроки наступления тех же событий. Очевидно, что для завершающего события поздний и ранний сроки совпадают и равны критическому времени проекта. Для *j*-го события выбирается минимальная из разностей, в которых уменьшаемым является поздний срок непосредственно следующего события, а вычитаемым – продолжительность операции, связывающей *j*-е событие со следующим. Для исходного события поздний и ранний сроки всегда совпадут, если в расчете не допущено ошибок.

Резервы времени событий находятся вычитанием, и остается показать критический путь (выделен жирной линией). Он может проходить только через события с нулевым значением резерва, но должен состоять только из таких операций, продолжительность которых не может быть увеличена без увеличения времени выполнения всего проекта.

Методика выполнения работы

Задача. Найти критический путь и временные параметры сетевого графика. Для задания подготовлена четырехсекторная схема (рис. 2), в остальных заданиях ее нужно нарисовать.

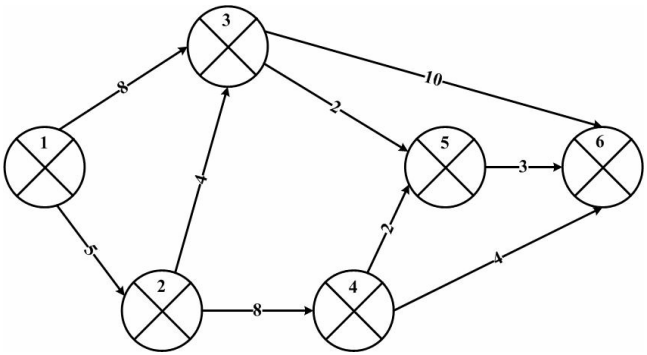


Рис. 2. Условие задачи

Решение

1. Выполнить первый этап расчета.

Ранний срок свершения исходного события 1 равен 0.

Ранний срок свершения события 2 равен 5 (сроку свершения предшествующих работ).

Ранний срок свершения события 3 равен 5 + 4 = 9 (самому длинному предшествующему событию пути.

2. Записать все ранние сроки свершения событий (рис. 3).

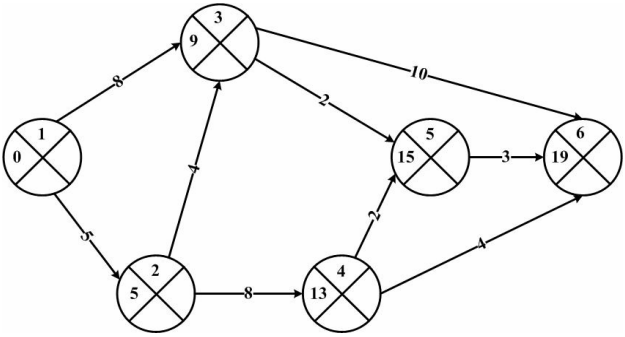


Рис. 3. Ранние сроки свершения событий

3. Для завершающего события поздний и ранний сроки совпадают и равны критическому времени проекта (19).

Резерв времени события – разность между поздним и ранним сроками свершения события. Для события 6 он равен нулю.

Поздний срок свершения события 5: 19 – 3 = 16, резерв времени события 5 равен 1.

Для события 4 поздний срок свершения события равен наименьшему из двух возможных: 16 – 2 = 14.

4. Записать все поздние сроки свершения событий и резервы времени.

5. Критический путь: 1–2–3–6.

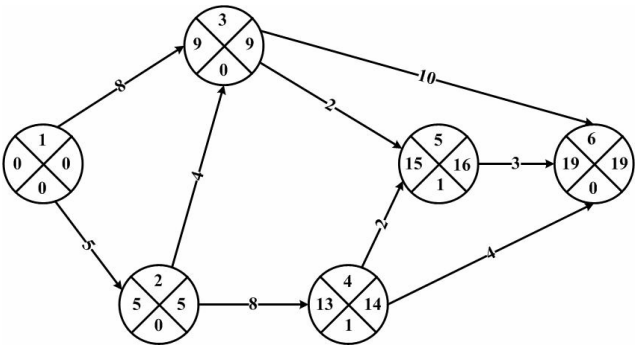
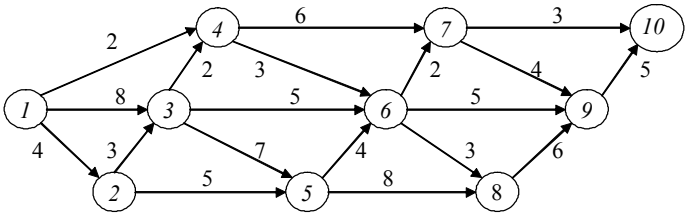


Рис. 4. Решение задачи

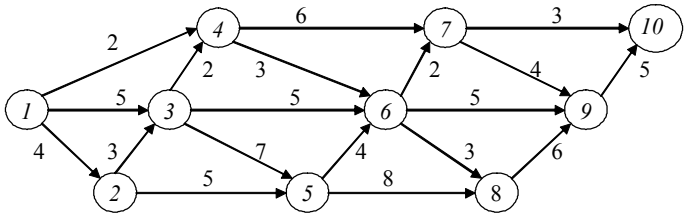
Задания для самостоятельного выполнения

Найти критический путь для каждого сетевого графика.

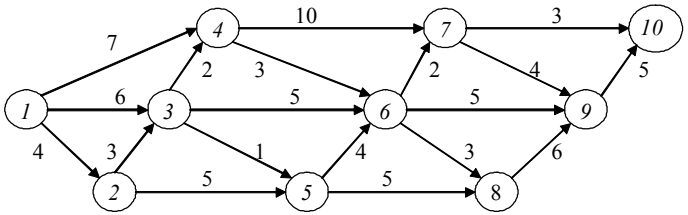
Задание 1



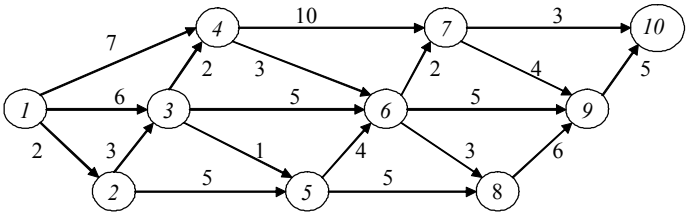
Задание 2



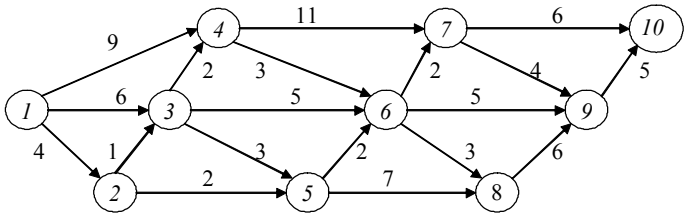
Задание 3



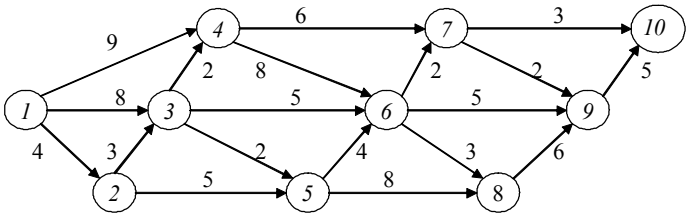
Задание 4



Задание 5



Задание 6



Контрольные вопросы

1. Перечислите правила нумерации операций сетевого графика.
2. Какова методика определения раннего срока свершения события?
3. Какова методика определения позднего срока свершения события?
4. Какова методика определения резерва времени события?
5. Опишите методику нахождения критического пути.

Практическое занятие № 10

РАСЧЕТ ОДНО- И МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ

***Цель занятия*:** овладеть приемами расчета системы массового обслуживания.

Теоретические сведения

Теория массового обслуживания изучает системы, в которых с одной стороны возникают массовые запросы (очереди) на выполнение каких-либо услуг, а с другой – происходит удовлетворение этих запросов.

Цель создания модели массового обслуживания – выработка обоснованных рекомендаций по рациональной организации работы этой системы.

Основные показатели функционирования системы – это среднее время ожидания в очереди и средняя длина очереди.

Основными элементами модели массового обслуживания являются заявка на обслуживание (клиент) и обслуживающая система (сервис). Если сервис свободен, клиент сразу попадает на обслуживание, в противном случае возникает очередь. Появление клиентов (заявок на обслуживание) характеризуется интервалом между их последовательными поступлениями, а функционирование сервиса – временем обслуживания. Как правило, эти параметры являются случайными, поэтому в системах массового обслуживания выделяют два потока событий: входной поток заявок на обслуживание и выходной поток обслуженных заявок. Эти потоки характеризуются определенными законами распределения вероятностей, и в результате их взаимодействия система оказывается в том или ином состоянии. Расчет вероятностных характеристик состояния системы (длины очереди, времени ожидания и т. д.) – одна из главных задач теории массового обслуживания.

При незнании теории массового обслуживания возникает иллюзия, что максимум эффективности будет достигаться при совпадении интенсивности потоков. Но это ошибка, потому что возникающая в этом случае очередь будет стремиться к неограниченному росту. Следовательно, клиенты будут искать другую систему обслуживания, что означает их потерю, а значит, и соответствующие убытки.

Часто система обслуживания содержит несколько обслуживающих каналов, между которыми можно выбирать. Поэтому различают одноканальные и многоканальные системы массового обслуживания.

Системы массового обслуживания с отказами (или потерями) распространены достаточно широко. Особенностью их функционирования является то, что всякое требование, поступившее в систему в некоторый момент времени, либо сразу обслуживается, либо теряется, если в момент его поступления все обслуживающие каналы заняты.

Методика выполнения работы

Задача 1. Информационная служба торгового предприятия дает справки по телефонной линии о наличии запасных частей к сельскохозяйственной технике и ценах на них. За одну минуту в среднем поступает три запроса, а продолжительность одного разговора в среднем составляет 0,25 мин. Определить важнейшие характеристики СМО, считая все потоки простейшими.

Решение

Математической моделью СМО в данном случае будет *одноканальная система с отказами*. Параметры данной системы:

– интенсивность входящего потока $\lambda = 3$;

– среднее время обслуживания $t_{обсл} = 0{,}25$;

– интенсивность обслуживания

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}};$$

$$\mu = 1 / 0{,}25 = 4.$$

Вероятность отказа запроса

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu};$$

$$P_{отк} = 3 / 7 = 0{,}429, \text{ или } 42{,}9\ \%.$$

Относительная пропускная способность СМО

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}429 = 0{,}571.$$

Абсолютная пропускная способность СМО

$$A = \lambda Q = 3 \cdot 0{,}571 = 1{,}713.$$

Из расчета следует, что случайный характер поступления запросов и случайный характер длительности разговоров привели к тому, что абсолютная пропускная способность СМО почти в 2,3 раза меньше производительности информационной службы.

При рассмотрении работы *многоканальной СМО с отказами* необходимо рассчитать следующие параметры:

1. Вероятность простоя каналов обслуживания (формула Эрланга)

$$P_{\text{о}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}},$$

где k – номер исполнителя;

n – максимальное число исполнителей.

2. Вероятность отказа в обслуживании в связи с занятостью всех исполнителей или каналов обслуживания ($k = n$)

$$P_{\text{отк}} = P_n = P_{\text{о}} \frac{\rho^n}{n!}.$$

3. Вероятность обслуживания

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}}.$$

4. Среднее число каналов, занятых обслуживанием:

$$n_1 = \rho P_{\text{обсл}}.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_1 = n_1 / n.$$

6. Пропускная способность всех каналов

$$N = \lambda P_{\text{обсл}}.$$

где λ – среднее число заказов в единицу времени (интенсивность заявок).

Задача 2. На складе организации работает три грузчика. Среднее число машин, приезжающих на склад за удобрениями в течение часа, – четыре. Затраты времени на погрузку одной автомашины – 40 мин. Если автомашина подъезжает к складу, когда все грузчики заняты, она направляется на другой склад.

Определить вероятность того, что автомашина не будет загружена, степень загрузки трех грузчиков и необходимое число грузчиков, чтобы вновь прибывшая за грузом автомашина была загружена с вероятностью $P = 0{,}95$.

Исходные данные:

– интенсивность заявок, или среднее число автомашин, прибывших за удобрением, в час, $\lambda = 4$;

– число исполнителей, т. е. грузчиков, $n = k = 3$;

– среднее время на выполнение одного заказа по загрузке одной автомашины $t_{обсл} = 40$ мин, или $t_{обсл} = 40 / 60 = 0{,}66$ ч;

– количество заказов, выполняемых в течение часа (в единицу времени), или количество автомашин, загружаемых в течение часа одним исполнителем (грузчиком):

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{0{,}66} = 1{,}52;$$

– среднее число занятых обслуживанием каналов

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{1{,}52} = 2{,}6.$$

Решение

1. Вероятность простоя каналов обслуживания

$$P_о = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P^k}{k!}} = \frac{1}{\frac{2{,}6^0}{0!} + \frac{2{,}6^1}{1!} + \frac{2{,}6^2}{2!} + \frac{2{,}6^3}{3!}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 2{,}6 + \frac{6{,}76}{2} + \frac{17{,}58}{6}} = \frac{1}{9{,}91} = 0{,}101.$$

2. Вероятность отказа в обслуживании

$$P_{отк} = P_n = P_о \frac{\rho^n}{n!} = 0{,}101 \cdot 2{,}6^3 / 3! = 0{,}295.$$

3. Вероятность обслуживания $P_{обсл} = 1 - 0{,}295 = 0{,}705$.

4. Среднее число занятых обслуживанием исполнителей, каналов обслуживания

$$n_1 = \rho P_{обсл} = 2{,}6 \cdot 0{,}705 = 1{,}833.$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_1 = n_1 / n = 1{,}833 / 3 = 0{,}611.$$

6. Абсолютная пропускная способность

$$N = \lambda P_{обсл} = 4 \cdot 0{,}705 = 2{,}82.$$

Если $k = 3$, $P_{обсл} = 0{,}705$, что менее 0,950.

Выполненные расчеты свидетельствуют о том, что при $k = 3$ вероятность загрузки автомашин составит 0,705.

При $k = 4$: $P_о = 0{,}085$; $P_{отк} = 0{,}160$; $P_{обсл} = 0{,}840 \leq 0{,}950$.

При $k = 5$: $P_о = 0{,}078$; $P_{отк} = 0{,}074$; $P_{обсл} = 0{,}926 \leq 0{,}950$.

При $k = 6$: $P_о = 0{,}075$; $P_{отк} = 0{,}03$; $P_{обсл} = 0{,}97 > 0{,}95$.

Таким образом, чтобы обеспечить загрузку автомашины с вероятностью не менее 95 %, требуется шесть грузчиков.

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Используя условие задачи 2 и результаты расчетов, определить, сколько грузчиков должно работать на складе, чтобы вновь прибывшая машина была загружена с вероятностью $P = 0{,}95$.

Задание 2. Машины прибывают на склад комбикормового завода в среднем через каждые 15 мин и, если грузчики заняты, встают в очередь. Среднее время обслуживания – 10 мин. Найти характеристики эффективности системы.

Задание 3. Найти характеристики обслуживания рабочим четырех станков, требующих наладки через каждые 20 мин. Среднее время наладки – 10 мин.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные элементы модели массового обслуживания.
2. Дайте определение дисциплины очереди.
3. Назовите виды СМО и характеристики очереди.
4. Опишите методику расчета параметров СМО с отказами.
5. Опишите методику расчета параметров СМО с неограниченной очередью.

Практическое занятие № 11

РАСЧЕТ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН ПАРТИЙ В УСЛОВИЯХ СКИДКИ НА РАЗМЕР ЗАКАЗА

***Цель занятия*:** овладеть навыками решения задач по определению оптимального размера партии материальных ресурсов предприятия, а также по корректировке полученного решения с учетом изменения первоначальных условий (скидка на цену за товар при оптовой покупке, способы доставки товара).

Теоретические сведения

Для обеспечения непрерывности производственного процесса необходимо поддерживать разумный запас ресурсов. Важным фактором, определяющим формулировку и решение задачи управления запасами, является потребность, или характер спроса. Критерий оптимальности является интегрирующим показателем сформулированной системы управления запасами. В качестве целевой функции в математических моделях чаще всего используют минимум суммарных затрат, связанных с заготовкой и содержанием запасов.

Модель оптимального размера партий используется для оценки размера заказа, обеспечивающего минимизацию общей стоимости запасов.

Оптимальный размер партии заказа рассчитывается по формуле

$$Q = \sqrt{\frac{2C_{\text{оф}}v}{C_{\text{хр}}}}.$$

Минимальный размер суммарных затрат при оптимальных параметрах системы управления однономенклатурными запасами составит:

$$F(C) = \frac{C_{\text{оф}}v}{\sqrt{(2C_{\text{оф}}v)/C_{\text{хр}}}} + \frac{C_{\text{хр}}}{2}\sqrt{(2C_{\text{оф}}v)/C_{\text{хр}}} =$$

$$= \sqrt{2C_{\text{оф}}C_{\text{хр}}v} = C_{\text{хр}}Q.$$

В реальных производственных ситуациях пополнение запаса в большинстве случаев не может произойти мгновенно в момент

размещения заказа, как предполагалось ранее. Поэтому необходимо учитывать время выполнения заказа. Во многих задачах существует положительный срок выполнения заказа L (временное запаздывание) от момента его размещения до реальной поставки. В этом случае точка заказа имеет место, когда уровень запаса опускается до Lv единиц. Предполагается, что срок выполнения заказа L меньше продолжительности цикла или интервала заказа t, что выполняется не всегда. В противном случае находят эффективный срок выполнения заказа

$$L_e = L - mt,$$

где m – наибольшее целое число, не превышающее значения отношения L / t.

В некоторых случаях цена на какой-либо товар не является постоянной и может зависеть от объема покупки или размещенного заказа. Многие поставщики предлагают определенные скидки на большие заказы. Значит, продукция может быть приобретена со скидкой, если объем заказа Q превышает некоторый фиксированный уровень $\widetilde{Q}$. Таким образом, цена единицы продукции P определяется следующим образом:

$$P = \begin{cases} P_1, \text{ если } \widetilde{Q} \le Q; \\ P_2, \text{ если } \widetilde{Q} \le Q, \end{cases}$$

где $P_1 > P_2$.

Принимая решение о том, пользоваться ли предлагаемыми скидками, необходимо рассчитать связанные с этим дополнительные затраты и возможную экономию. Заказы на более крупные партии продукции влекут за собой увеличение расходов на хранение, которое может быть до некоторой степени компенсировано снижением закупочной цены.

Методика выполнения работы

Задача 1. Строительная организация получила подряд на возведение объектов в агропромышленной сфере. Потребность в цементе – 4000 ц в год. Затраты на оформление одной партии цемента –

80 усл. д. ед. независимо от объема партии. Ежегодные затраты на хранение 1 ц цемента – 4 усл. д. ед. (25 % от стоимости покупки 1 ц). Определить оптимальную стратегию заказа цемента.

Решение

Исходные данные:

– потребность в цементе $v = 4000$ ц;

– затраты на оформление одной партии цемента $C_{оф} = 80$ усл. д. ед.;

– ежегодные затраты на хранение 1 ц цемента $C_{хр} = 4$ усл. д. ед.

Оптимальный размер партии заказа

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 4000}{4}} = 400.$$

Результат говорит о том, что для минимизации затрат размер заказа должен составить 400 ц цемента. Оптимальный интервал между поставками $t = Q / v$. В рассматриваемом примере $t = 400 / 4000 = 0{,}1$ года. Учитывая, что в году 365 дней, время между поставками – примерно 37 дней. Оптимальное число поставок $n = 4000 / 400 = 10$.

В данном случае $C_{min} = 4 \cdot 400 = 1600$. Любое отклонение от оптимальной величины ведет к увеличению затрат, но в реальной ситуации необходимо учитывать и другие факторы. Например, если цемент доставляют цементовозами, то грузоподъемность одной машины равна 7 т. В этом случае скорректированное значение экономичной партии цемента составит $6 \cdot 70 = 420$ ц.

Задача 2. Завод производит сельскохозяйственную технику для поставок в страны ближнего зарубежья и имеет потребность в комплектующих изделиях в количестве 90 шт. в день. Подразделение, занимающееся коммерческими операциями, заказывает эти изделия с определенной периодичностью. Стоимость размещения заказа на поставку комплектующих – 90 усл. д. ед. Расходы на хранение изделий на складе оцениваются в 0,02 усл. д. ед. в день. Срок выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки – 17 дней. Определить оптимальную стратегию заказа комплектующих изделий.

Решение

Исходные данные:

$V = 90$ шт. в день;

$K = 90$ усл. д. ед. за заказ;

$S = 0{,}02$ усл. д. ед. за хранение одного изделия в день;

$L = 17$ дней.

Значит, оптимальный объем заказа

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \cdot 90}{0,02}} = 900.$$

Соответствующая длина цикла t = 900 / 90 = 10 дней. Так как срок выполнения заказа (L = 17 дней) превышает продолжительность цикла (t = 10 дней), необходимо вычислить число целых циклов, заключенных в L:

$$M = 17 / 10 = 1.$$

Необходимо найти эффективный срок L_e выполнения заказа:

$$L_e = 17 - 1 \cdot 10 = 7 \text{ дней.}$$

Поэтому точка повторного заказа имеет место при уровне запаса

$$L_e v = 7 \cdot 90 = 630 \text{ изделий.}$$

Оптимальная стратегия заказа комплектующих изделий может быть сформулирована так: необходимо заказать 900 изделий, как только уровень их запаса уменьшается до 630 шт. Дневные расходы, связанные с содержанием запаса в соответствии с оптимальной стратегией, $C_{\min} = SQ = 0,02 \cdot 900 = 18$ усл. д. ед. в день.

Задания для самостоятельного выполнения

Задание 1. Белорусский торговый дом, работающий в одном из региональных центров России, продает 2000 электродвигателей в год. Величина спроса равномерно распределяется в течение указанного периода. Каждый электродвигатель стоит 150 усл. д. ед. Согласно расчету стоимость обработки одного заказа составляет 50 усл. д. ед. в виде административных и постоянных транспортных расходов. Время доставки заказа от поставщика – 3 рабочих дня. По оценкам специалистов, издержки хранения составляют 15 % среднегодовой стоимости запасов. Предполагается, что торговый дом работает 300 дней в году.

Определить:

– оптимальную партию поставки электродвигателей;

– оптимальный интервал между поставками (длину цикла);

– точку размещения заказа (уровень повторного заказа).

Задание 2. Агрокомпания, занимающаяся внешнеторговыми операциями, хранит на складе продукцию для материально-технического обеспечения предприятий сельскохозяйственной сферы. Интенсивность потребления данного товара – 80 единиц в день. За размещение каждого заказа агрокомпания платит 10 усл. д. ед. Стоимость хранения единицы продукции на складе обходится в 0,42 усл. д. ед. в неделю.

Определить оптимальную стратегию управления запасами, если предположить, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки – 5 дней.

Задание 3. В рамках межобластного обмена молочными продуктами Брестский молочный комбинат поставляет молоко определенной жирности в тетрапакетах торговому предприятию Минской области. Потребность магазина составляет 6000 пакетов молока долгосрочного хранения в квартал. Продукт доставляется на склад в контейнерных упаковках в количестве 100 шт. Затраты на заказ и оформление поставки одной партии молока составляют 5 усл. д. ед. Среднеквартальные издержки хранения одного пакета молока – 0,4 усл. д. ед.

Определить:

– период поставки и общие среднеквартальные издержки склада на заказ и хранение молока;

– экономичный размер заказываемой партии молока, период поставок и их количество, а также среднеквартальные издержки склада на оформление и хранение молочного продукта в оптимальном режиме;

– величину абсолютного увеличения фактических издержек по сравнению с оптимальной стратегией управления запасами и коэффициент относительного увеличения издержек.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные виды затрат в моделях управления запасами.
2. Перечислите основные предпосылки при определении экономичного размера заказа партии товара.
3. Каким образом объем приобретаемого товара может повлиять на экономичный размер партии товара?
4. Как определить точку заказа товара в моделях управления запасами?
5. Что включают в себя затраты на оформление заказа?

Практическое занятие № 12

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ВНЕШНЕТОРГОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

***Цель занятия*:** овладеть практическими навыками составления экономико-математических задач оптимизации структуры торгового баланса.

Теоретические сведения

При постановке экономико-математической задачи учитываются предварительные обязательства по минимальному (гарантированному) объему поставок товаров в зарубежные страны, что вытекает из намечаемых контрактов, договоров, соглашений и т. д. Минимально необходимые объемы реализации предусматриваются и с внутренними потребителями на основе заключенных коммерческих сделок. Кроме того, не могут быть превышены лимиты максимальных возможностей сбыта по отдельным изделиям или товарным группам, установленные путем изучения конкретных рынков (как внутри страны, так и вне ее).

Критерий оптимальности этой задачи направлен на разработку рациональных предложений по реализации различных типов, марок и модификаций сельскохозяйственной техники на внутренних и внешних рынках. Поэтому целевой функцией будет максимизация прибыли, включающая суммарную валютную выручку от экспорта и реализации продукции на внутренних рынках за вычетом затрат по экспорту и затрат (себестоимости продукции), понесенных при сбыте товаров внутри республики. Для упрощения такой записи можно абстрагироваться от возможных издержек обращения во внешней торговле, а также финансовых затрат для стимулирования экспортной деятельности.

Структурная ЭММ оптимизации функционирования внешнеторгового предприятия:

– *индексация*:

j – номер марки товара;

J_0 – множество марок товаров;

k – номер вида двигателей;

K_0 – множество видов двигателей;

K_1 – множество видов двигателей, импортируемых в республику;

K_2 – множество видов двигателей, производимых в республике;

t – номер рынка сбыта товаров;

T_0 – множество рынков сбыта (стран);

T_1 – множество внешних рынков сбыта;

T_2 – множество внутренних рынков сбыта;

T_3 – множество однородных рынков сбыта, объединенных в союз;

– *неизвестное*:

x_{kjt} – количество тракторов марки j, оснащенных двигателями вида k и реализуемых на рынках t;

– *известные*:

P_i – стоимость сельскохозяйственной техники (финансовый ресурс вида i) для реализации в плановый период;

$\tilde{P}_i$ – стоимость сельскохозяйственной техники (финансовый ресурс вида i) для реализации на внутренних рынках;

D_{it} – минимальный экспортный объем стоимости товаров (финансового ресурса i) на внешних рынках вида t;

Q_{kj} – максимальный объем производства и поставок тракторов марки j с двигателями вида k;

$\tilde{M}_{kjt}$, M_{kij} – соответственно минимальное и максимальное количество реализуемых тракторов марки j с двигателями вида k для реализации на рынке t;

C_{kjt} – выручка от экспорта единицы каждой модели трактора марки j с двигателем вида k при реализации на внешних рынках t;

$\tilde{C}_{kjt}$ – отпускная цена реализации единицы трактора типа j с двигателем вида k при сбыте на рынках t;

S_{kjt} – себестоимость единицы модели трактора j, оснащенного импортным двигателем вида k и реализуемого на рынках t;

$\tilde{S}_{kjt}$ – себестоимость единицы модели трактора j, оснащенного двигателем отечественного производства вида k при сбыте на рынках t;

V_{kjt} – затраты на импорт единицы двигателя вида k, эксплуатируемого с тракторами марки j при поставке из страны t.

Требуется найти x_{kjt} при следующих условиях:

1) ограничение по выполнению общего объема реализуемой сельскохозяйственной техники разных модификаций:

$$\sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_0}\sum_{t\in T_0}\tilde{C}_{kjt}x_{kjt} \ge P_i,\ i=1;$$

2) ограничение по объему тракторов, сбываемых на внутреннем рынке:

$$\sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_0}\sum_{t\in T_2}\tilde{C}_{kjt}x_{kjt} \ge \tilde{P}_i,\ i=1;$$

3) ограничение по обеспечению внешнеторгового сальдо с отдельными странами:

$$\sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_0}c_{kjt}x_{kjt} - \sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_1}V_{kjt}x_{kjt} \ge D_{it},\ t\in T_3,\ i=1;$$

4) ограничение по экспортным поставкам на внешние рынки:

$$\sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_0}c_{kjt}x_{kjt} \ge D_{it},\ t\in T_1,\ i=1;$$

5) ограничение по максимальному количеству производимых товаров:

$$\sum_{t\in T_0}x_{kjt} \le Q_{kj},\ j\in J_0,\ k\in K_0;$$

6) ограничение по минимальным и максимальным возможностям сбыта тракторов:

$$\tilde{M}_{kjt} \le x_{kjt} \le M_{kjt},\ j\in J_0,\ k\in K_0,\ t\in T_0.$$

Целевая функция

$$F_{\max} = \sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_0}\sum_{t\in T_1}c_{kjt}x_{kjt} + \sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_0}\sum_{t\in T_2}\tilde{c}_{kjt}x_{kjt} -$$
$$-\sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_1}\sum_{t\in T_0}S_{kjt}x_{kjt} - \sum_{j\in J_0}\sum_{k\in K_2}\sum_{t\in T_0}\tilde{S}_{kjt}x_{kjt}.$$

Методика выполнения работы

Рассмотрим оптимизацию товарной и региональной структур внешней торговли на примере взаимодействия внешнеторгового предприятия и завода сельскохозяйственного машиностроения.

Задача. Завод выпускает два типа мини-тракторов – «Сейбит» и «Сейбит-1», – которые могут быть снабжены одним из двух имеющихся видов двигателей (вид № 1, вид № 2). Четыре вида изделий могут реализовываться на внутреннем рынке, а также экспортироваться в восемь стран. Предусматривается импорт двигателей из Содружества Независимых Государств (СНГ).

Согласно бизнес-плану завода стоимость подлежащей реализации продукции должна составить в прогнозный период не менее 120 млрд руб. Объем поставок в сеть внутренней торговли в стоимостном выражении планируется в размере 29,6 млрд руб.

На основе долговременных внешнеэкономических связей предполагается экспорт в страны СНГ не менее 11,4 млн дол. США, в страны Прибалтики – не менее 5,7 млн дол. США, в страны Восточной Европы – не менее 8,5 млн дол. США. Кроме того, для выравнивания платежного баланса по Словакии внешнеторговая организация предусматривает объем экспортных поставок в эту страну, равный не менее 2,3 млн дол. США.

Максимальная мощность завода сельскохозяйственного машиностроения по производству корпусов мини-тракторов двух моделей составляет 45 000 шт. В рамках взаимовыгодного сотрудничества с предприятиями профильной специализации внутренние поставки двигателей, которыми снабжаются оба типа тракторов, характеризуются следующими условиями: двигатель вида № 1 – не более 20 000 шт., двигатель вида № 2 – не более 10 000 шт. Возможности импорта двигателей СНГ не ограничиваются и зависят в основном от наличия необходимых валютных средств.

Все мини-тракторы модели «Сейбит», а также модели «Сейбит-1» с двигателем вида № 1 завод предполагает оснащать кабинами, кооперированные поставки которых не превысят 29 000 шт. Импорт кабин исключается.

С зарубежными странами имеются соглашения по минимальным обязательствам экспортных поставок. Минимально необходимые объемы тракторов предусмотрены и с внутренними потребителями

на основе заключенных коммерческих договоров. Кроме того, экспорт сельскохозяйственной техники ограничен максимальными возможностями закупки каждой модели, существующими в отдельно взятой стране. Аналогичное условие характерно и для внутреннего рынка. Информация о минимально необходимых объемах сбыта $\tilde{M}$ тракторов (шт.), максимальных возможностях поставок M и валютной выручке от продажи единицы продукции ВВ (тыс. дол. США.) по каждому товару и каждой стране при комплектовании отечественными двигателями приведена в табл. 1.

Таблица 1

Сбытовые показатели по реализуемому товару

Вид двигателя	Показатель	Рынки сбыта								
		Украина	Россия	Молдова	Литва	Латвия	Словакия	Польша	Чехия	Внутренний
«Сейсбит»										
№ 1	$\tilde{M}$	7500	–	1000	–	3000	–	–	–	
	M	7900	300	1400	200	3600	–	100	150	300
	ВВ	1,6	1,52	1,57	1,63	1,61	–	1,54	1,57	–
№ 2	$\tilde{M}$	–	2900	–	–	–	–	3100	–	–
	M	–	3500	150	700	220	110	3450	–	250
	ВВ	–	1,73	1,74	1,9	1,93	1,65	1,79	–	–
«Сейсбит-1»										
№ 1	$\tilde{M}$	1000	–	2000	–	–	900	–	400	1100
	M	1250	150	2400	200	400	950	300	500	3600
	ВВ	1,4	1,35	1,39	1,48	1,46	1,85	1,8	1,86	–
№ 2	$\tilde{M}$	–	–	–	–	–	–	–	–	4700
	M	2500	1800	–	–	–	1100	–	–	8950
	ВВ	1,29	1,28	–	–	–	1,5	–	–	–

Валютная выручка от продажи единицы каждой модели при оснащении импортными двигателями по соответствующему конкретному рынку стран-импортеров сельскохозяйственной техники увеличивается на 20–30 %. Плановые цифры внутренних и импортных цен, а также себестоимость производимой продукции приведены в табл. 2.

Таблица 2

Финансовые показатели (за 1 шт. товара)

Вид двигателя	Отпускная цена промышленности, млн руб./тыс. дол. США	Себестоимость тракторов с двигателями отечественного производства, млн руб./тыс. дол. США	Себестоимость тракторов с импортными двигателями, млн руб./тыс. дол. США	Затраты на импорт двигателей, тыс. дол. США
«Сейсбит»				
№ 1	3,0/1,5	2,3/1,15	2,5/1,25	0,69
№ 2	3,2/1,6	2,6/1,3	2,9/1,45	0,75
«Сейсбит-1»				
№ 1	3,1/1,55	2,7/1,35	2,8/1,4	0,7
№ 2	2,2/1,1	1,6/0,8	1,9/0,95	0,55

Решение

Критерий оптимальности данной задачи состоит в разработке оптимальных предложений по реализации четырех типов мини-тракторов на внутреннем и внешнем рынках. Целевая функция – максимизация прибыли, включающая суммарную валютную выручку от экспорта (выручка от экспорта мини-тракторов с двигателями отечественного производства и с импортными двигателями), суммарную выручку от реализации продукции внутри страны за вычетом затрат, связанных с экспортом, и затрат (себестоимости продукции), понесенных при реализации на внутреннем рынке.

В данной целевой функции не учитываются показатели по импорту двигателей, поскольку доходы и затраты, обусловленные этой операцией, погашают друг друга. Для упрощения записи следует абстрагироваться от возможных издержек обращения во внешней торговле, а также от учета финансовых затрат для стимулирования экспортной деятельности.

В задаче определяются объемы сбыта четырех видов мини-тракторов на внутреннем рынке, а также их экспорт в каждую из восьми стран. Тракторы могут быть оснащены двигателями импортного или отечественного производства, различающимися издержками. С учетом такого комплектования сельскохозяйственных машин вводятся неизвестные переменные:

$x_1 \ldots x_8$ – количество тракторов модели «Сейбит», оснащенных двигателями отечественного производства вида № 1 и поставляемых соответственно в Украину, Россию, Молдову, Литву, Латвию, Польшу, Чехию и на внутренний рынок, шт.;

$x_9 \ldots x_{15}$ – количество тракторов модели «Сейбит», оснащенных двигателями отечественного производства вида № 2 и поставляемых соответственно в Россию, Молдову, Литву, Латвию, Польшу, Чехию и на внутренний рынок, шт.;

$x_{16} \ldots x_{24}$ – количество тракторов модели «Сейбит-1», оснащенных двигателями отечественного производства вида № 1 и поставляемых соответственно в Украину, Россию, Молдову, Литву, Латвию, Словакию, Польшу, Чехию и на внутренний рынок, шт.;

$x_{25} \ldots x_{28}$ – количество тракторов модели «Сейбит-1», оснащенных двигателями отечественного производства вида № 2 и поставляемых соответственно в Украину, Россию, Словакию и на внутренний рынок, шт.

Далее последовательно записывается группа неизвестных переменных, обозначающих количество реализуемых моделей на различные рынки при комплектовании импортными двигателями одинаковой мощности по отношению к отечественным поставкам:

$x_{29} \ldots x_{36}$ – сбыт мини-тракторов модели «Сейбит» (импортный двигатель вида № 1) по аналогичным каналам реализации, шт.;

$x_{37} \ldots x_{43}$ – сбыт мини-тракторов модели «Сейбит» (импортный двигатель вида № 2), шт.;

$x_{44} \ldots x_{52}$ – сбыт мини-тракторов модели «Сейбит-1» (импортный двигатель вида № 1), шт.;

$x_{53} \ldots x_{56}$ – сбыт мини-тракторов модели «Сейбит-1» (импортный двигатель вида № 2), шт.

Формализация отдельных ограничений:

1. По общей стоимости реализуемых товаров, млрд руб.:

$$3\,(x_1 + \ldots + x_8 + x_{29} + \ldots + x_{36}) + \\ + 3{,}2\,(x_9 + x_{15} + x_{37} + \ldots + x_{43}) + 3{,}1\,(x_{16} + \ldots + x_{24} + x_{44} + \ldots + x_{52}) + \\ + 2{,}2\,(x_{25} + \ldots + x_{28} + x_{53} + \ldots + x_{56}) \geq 120.$$

2. По стоимости тракторов, сбываемых на внутреннем рынке, млрд руб.:

$$3\,(x_8 + x_{36}) + 3{,}2\,(x_{15} + x_{43}) + \\ + 3{,}1\,(x_{24} + x_{52}) + 2{,}2\,(x_{28} + x_{56}) \geq 29{,}6.$$

3. По обеспечению сальдо внешнеторгового оборота со странами СНГ, тыс. дол. США:

$$1{,}6x_1 + 1{,}52x_2 + 1{,}57x_3 + 1{,}73x_9 + 1{,}74x_{10} + 1{,}4x_{16} + 1{,}35x_{17} + 1{,}39x_{18} + \\ + 1{,}29x_{25} + 1{,}28x_{26} + 1{,}6x_{29} \cdot 1{,}25 + 1{,}52x_{30} \cdot 1{,}25 + 1{,}57x_{31} \cdot 1{,}25 + \ldots + \\ + 1{,}29x_{53} \cdot 1{,}25 + 1{,}28x_{54} \cdot 1{,}25 - 0{,}69\,(x_{29} + \ldots + x_{31}) - \\ - 0{,}75\,(x_{37} + x_{38}) - 0{,}7\,(x_{44} + \ldots + x_{46}) - 0{,}55\,(x_{53} + x_{54}) \geq 11\,400.$$

4. По объему экспорта в страны Прибалтики, тыс. дол. США:

$$1{,}63x_4 + 1{,}61x_5 + 1{,}9x_{11} + 1{,}93x_{12} + 1{,}48x_{19} + \\ + 1{,}46x_{20} + 1{,}63x_{33} \cdot 1{,}25 + \ldots + 1{,}46x_{48} \cdot 1{,}25 \geq 5700.$$

5. По объему экспорта в страны Восточной Европы, тыс. дол. США:

$$1{,}54x_6 + 1{,}57x_7 + \ldots + 1{,}5x_{55} \cdot 1{,}25 \geq 8500.$$

6. По объему экспорта в Словакию, тыс. дол. США:

$$1{,}65x_{13} + 1{,}85x_{21} + 1{,}5x_{27} + 1{,}65x_{41} \cdot 1{,}25 + \\ + 1{,}85x_{49} \cdot 1{,}25 + 1{,}55x_{55} \cdot 1{,}25 \geq 2300.$$

7. По максимальным мощностям производства корпусов мини-тракторов различных моделей, шт.:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{55} + x_{56} \leq 45\ 000.$$

8. По внутренним поставкам двигателей вида № 1:

$$x_1 + \ldots + x_8 + x_{16} + \ldots + x_{24} \leq 20\ 000.$$

9. По внутренним поставкам двигателей вида № 2:

$$x_9 + \ldots + x_{15} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \leq 10\ 000.$$

10. По количеству поставляемых кабин для отдельных моделей тракторов:

$$x_1 + \ldots + x_{24} + x_{29} + \ldots + x_{52} \leq 29\ 000.$$

11. По минимально необходимым объемам поставок товаров на различные рынки:

– тракторов «Сейбит» с двигателями вида № 1:

в Украину: $x_1 + x_{29} \geq 7500$;

в Молдову: $x_3 + x_{31} \geq 1000$ и т. д. (по всем направлениям продаж разнообразных модификаций тракторов).

12. По максимальным возможностям сбыта:

– тракторов «Сейбит» с двигателями вида № 1:

в Украину: $x_1 + x_{29} \leq 7900$;

в Россию: $x_2 + x_{30} \leq 300$ и т. д.

Последнее ограничение – по предельным (максимильным) поставщикам тракторов «Сейбит-1» с двигателями вида № 2 на внутренний рынок: $x_{28} + x_{56} \leq 8950$.

Целевая функция – максимум прибыли от реализации данной группы товаров на внутреннем и внешнем рынках:

$$F_{\max} = 1{,}6x_1 + 1{,}52x_2 + 1{,}57x_3 + 1{,}63x_4 + 1{,}61x_5 + 1{,}54x_6 + 1{,}57x_7 + \\ + 1{,}5x_8 + 1{,}73x_9 + \ldots + 1{,}55x_{55} \cdot 1{,}25 + 1{,}1x_{56} - 1{,}15\,(x_1 + \ldots + x_8) - \\ - 1{,}3\,(x_9 + \ldots + x_{15}) - \ldots - 1{,}4\,(x_{44} + \ldots + x_{52}) - 0{,}95\,(x_{53} + \ldots + x_{56}).$$

Задание для самостоятельного выполнения

Завод выпускает два типа самоходных машин – «Бизон» и «Бизон-1», – которые могут быть снабжены одним из двух имеющихся видов двигателей (вид № 1, вид № 2). Четыре вида изделий могут реализовываться на внутреннем рынке, а также экспортироваться в шесть стран. Предусматривается импорт двигателей из СНГ.

Согласно бизнес-плану завода стоимость подлежащей реализации продукции должна составить в прогнозный период не менее 250 млрд руб. Объем поставок в сеть внутренней торговли в стоимостном выражении планируется в размере 13,3 млрд руб.

На основе долговременных внешнеэкономических связей предполагается экспорт в страны СНГ не менее 7,7 млн дол. США, в страны Прибалтики – не менее 6,1 млн дол. США, в страны Восточной Европы – не менее 5,8 млн дол. США. Кроме того, для выравнивания платежного баланса по Польше внешнеторговая организация предусматривает объем экспортных поставок в эту страну, равный не менее 1,7 млн дол. США.

Максимальная мощность завода сельскохозяйственного машиностроения по производству корпусов самоходных машин двух моделей составляет 31 000 шт. В рамках взаимовыгодного сотрудничества с предприятиями профильной специализации внутренние поставки двигателей, которыми снабжаются оба типа тракторов, характеризуются следующими условиями: двигатель вида № 1 – не более 13 000 шт., двигатель вида № 2 – не более 7000 шт. Возможности импорта двигателей СНГ не ограничиваются и зависят в основном от наличия необходимых валютных средств.

Все самоходные машины модели «Бизон», а также модели «Бизон-1» с двигателем вида № 1 завод предполагает оснащать кабинами, кооперированные поставки которых не превысят 23 000 шт. Импорт кабин исключается.

С зарубежными странами имеются соглашения по минимальным обязательствам экспортных поставок. Минимально необходимые объемы тракторов предусмотрены и с внутренними потребителями на основе заключенных коммерческих договоров. Кроме того, экспорт сельскохозяйственной техники ограничен максимальными возможностями закупки каждой модели, существующими в отдельно взятой стране. Аналогичное условие характерно и для внутреннего рынка. Информация о минимально необходимых объемах сбыта $\tilde{M}$ тракторов (шт.), максимальных возможностях поставок M и валютной выручке от продажи единицы продукции ВВ (тыс. дол. США) по каждому товару и каждой стране при комплектовании отечественными двигателями приведена в табл. 3.

Таблица 3

Сбытовые показатели по реализуемому товару

Вид двигателя	Показатель	Рынки сбыта						
		Украина	Россия	Литва	Латвия	Польша	Чехия	Внутренний
«Бизон»								
№ 1	$\tilde{M}$	–	–	2250	–	2750	–	–
	M	–	245	75	2750	3130	95	210
	ВВ	–	1,52	1,73	1,71	1,54	1,57	–
№ 2	$\tilde{M}$	5800	1525	–	–	–	–	–
	M	6350	2350	550	130	70	–	170
	ВВ	1,6	1,73	1,9	1,93	1,81	–	–
«Бизон-1»								
№ 1	$\tilde{M}$	–	–	–	–	–	–	770
	M	750	50	120	220	–	–	2200
	ВВ	1,4	1,35	1,51	1,53	–	–	–
№ 2	$\tilde{M}$	1000	–	–	–	–	330	3100
	M	1750	1050	–	–	210	450	6200
	ВВ	1,29	1,28	–	–	1,77	1,91	–

Валютная выручка от продажи единицы каждой модели при оснащении импортными двигателями по соответствующему конкретному рынку стран-импортеров сельскохозяйственной техники увеличивается на 27 %. Плановые цифры внутренних и импортных цен, а также себестоимость производимой продукции приведены в табл. 4.

Таблица 4

Финансовые показатели (за 1 шт. товара)

Вид двигателя	Отпускная цена промышленности, млн руб./тыс. дол. США	Себестоимость тракторов с двигателями отечественного производства, млн руб./тыс. дол. США	Себестоимость тракторов с импортными двигателями, млн руб./тыс. дол. США	Затраты на импорт двигателей, тыс. дол. США
«Бизон»				
№ 1	2,7/1,3	2,3/1,15	2,4/1,25	0,7
№ 2	3,3/1,7	2,6/1,3	2,9/1,45	0,85
«Бизон-1»				
№ 1	3,0/1,5	2,5/1,3	2,9/1,45	0,75
№ 2	2,7/1,3	1,8/1,1	1,9/0,95	0,6

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные ограничения задачи оптимизации производства специализированного внешнеторгового предприятия.
2. Каков критерий оптимальности данной задачи?
3. Каким образом определяют минимально необходимые объемы поставок на внутреннем и внешнем рынках?
4. Каким образом определяют максимально возможные закупки техники на внутреннем и внешнем рынках?
5. Охарактеризуйте ограничение по обеспечению внешнеторгового сальдо.

Практическое занятие № 13

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕКЛАМНОГО БЮДЖЕТА ОРГАНИЗАЦИИ

***Цель занятия*:** овладеть практическими навыками составления экономико-математических задач оптимизации распределения рекламного бюджета.

Теоретические сведения

Рекламный бюджет предполагает принятие решений в двух сферах: общее количество средств, выделяемых на рекламу (ассигнований), и то, каким образом они будут использоваться. Как и при принятии большинства других решений, в рекламе определение суммы затрат – в основном вопрос здравого суждения. Когда отсутствует методика точного определения вклада рекламы в повышение сбыта и прибыли, распорядители при разработке бюджета не могут полагаться на какие-то простые формулы. Наоборот, они должны учитывать множество факторов, определять цифру, которая, по их мнению, наиболее полно отвечает требованиям конкретного сочетания обстоятельств.

Высокие расходы предпринимателей на рекламу и ее значение для успеха предприятия обусловливают необходимость попыток сделать этот инструмент более надежным с помощью контроля.

Критерий оптимальности этой задачи направлен на разработку рациональных предложений по распределению рекламного бюджета с целью максимизации прибыли организации.

Структурная ЭММ оптимизации рекламного бюджета организации:

– *индексация*:

i – номер вида ресурса ($i = 1$);

n – номер вида рекламы;

N_0 – множество видов рекламы;

N_1 – множество видов рекламы, находящейся в пропорциональной зависимости, $N_1 \in N_0$;

– *неизвестные*:

x_{in} – количество ресурса (денежных средств) вида i, выделяемого для рекламы вида n;

– *известные*:

R_i – объем рекламного бюджета, т. е. количество ресурса (денежных средств) вида i, выделяемого для рекламы;

$\tilde{d}_{in}$, d_{in} – соответственно минимальная и максимальная доли ресурса (денежных средств) вида i, выделяемого для рекламы вида n.

f_{in} – коэффициент соотношения ресурса (денежных средств) вида i, выделяемого для рекламы вида n, находящейся в пропорциональной зависимости;

p_{in} – количество ресурса (денежных средств, прибыли) вида i, получаемого от рекламы вида n.

Найти максимум прибыли от рекламы при следующих условиях:

1) ограничение по использованию рекламного бюджета:

$$\sum_{n \in N_0} x_{in} \le R_i, \; i = 1;$$

2) ограничение по предельным объемам средств, выделяемых для рекламы:

$$\tilde{d}_{in} R_i \le x_{in} \le d_{in} R_i, \; i = 1, n \in N_0;$$

3) ограничение по соотношению различных видов рекламы:

$$x_{in} = f_{in} x_{in}, \; i = 1, n \in N_1;$$

4) ограничение по неотрицательности переменных:

$$x_{in} \ge 0.$$

Целевая функция

$$F_{\max} = \sum_{n \in N_0} \sum_{i=1} p_{in} x_{in}.$$

Методика выполнения работы

Используя исходную информацию по рекламному бюджету организации, необходимо:

– ввести неизвестные величины задачи;

– составить условия экономико-математической задачи, записать целевую функцию исходя из структурной модели;

– решить задачу с помощью надстройки Excel «Поиск решения».

Для решения задачи потребуются знания и навыки, полученные на следующих занятиях:

1. Практическое занятие № 4 «Формирование ограничений экономико-математической задачи рациона кормления животных».
2. Практическое занятие № 5 «Формирование ограничений экономико-математической задачи использования кормов».
3. Практическое занятие № 6 «Формирование матрицы задачи использования кормов».
4. Практическое занятие № 12 «Оптимизация производства специализированного внешнеторгового предприятия».
5. Лабораторная работа № 13 «Решение задачи рациона кормления животных с помощью надстройки Excel «Поиск решения».
6. Лабораторная работа № 14 «Решение и анализ полученных результатов задачи использования кормов сельскохозяйственной организации».

Задание для самостоятельного выполнения

Организация рекламирует свою продукцию с использованием следующих средств массовой информации: телевидение, радио, газеты, журналы, афиши.

Из проведенных за прошлые периоды маркетинговых исследований известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на (5 – 0,1№); (2 + 0,2№); (3 + 0,1№); (4 + 0,1№); (1 + 0,3№) усл. д. ед. в расчете на 1 усл. д. ед. затраченных средств, где № – порядковый номер студента в списке подгруппы.

Рекламный бюджет не должен превышать выделенную сумму, равную (40 + 2№) тыс. усл. д. ед.

На афиши следует расходовать не менее 10 % рекламного бюджета. На рекламу на телевидении – не более 40 %. На рекламу

на радио целесообразно расходовать не менее половины той суммы, которую планируется использовать на телевидение. Затраты на рекламу в газетах должны составить $^{2}/_{3}$ от средств, выделяемых на рекламу в газетах и журналах.

Необходимо обосновать распределение средств по различным источникам рекламы с целью максимизации прибыли.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой рекламный бюджет?
2. В каких сферах рекламный бюджет предполагает принятие решений?
3. Какие группы ограничений применяют при составлении задачи оптимизации распределения рекламного бюджета?
4. Какой вид имеет целевая функция задачи оптимизации распределения рекламного бюджета?
5. Каков критерий оптимальности задачи оптимизации распределения рекламного бюджета?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И. В. Эконометрика. Практикум : учебное пособие / И. В. Белько, Е. А. Криштапович. – Минск : Издательство Гревцова, 2011. – 221 с.

2. Гармаш, А. Н. Математические методы в управлении : учебное пособие / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова. – М. : Вузовский учебник : Инфра-М, 2013. – 272 с.

3. Колеснев, В. И. Экономико-математические методы и модели. Практикум : учебное пособие для студентов сельскохозяйственных вузов по экономическим специальностям / В. И. Колеснев. – Минск : ИВЦ Минфина, 2010. – 296 с.

4. Костюнин, В. И. Эконометрика. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. И. Костюнин. – М. : Юрайт, 2014. – 284 с.

5. Леньков, И. И. Экономико-математические методы в экономике АПК : учебное пособие / И. И. Леньков. – Минск : БГАТУ, 2009. – 168 с.

6. Невежин, В. П. Исследование операций и принятие решений в экономике. Сборник задач и упражнений : учебное пособие для вузов / В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин ; под общ. ред. В. П. Невежина. – М. : Форум, 2012. – 400 с.

7. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование. Практическое пособие по решению задач / И. В. Орлова. – М. : Вузовский учебник : Инфра-М, 2013. – 140 с.

8. Тимофеев, В. С. Эконометрика. Учебник для академического бакалавриата / В. С. Тимофеев, А. В. Фаддеенков, В. Ю. Щеколдин. – М. : Юрайт, 2015. – 2 изд., перераб. и доп. – 328 с.

9. Хуснутдинов, Р. М. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / Р. М. Хуснутдинов. – М. : Инфра-М, 2013. – 224 с.

10. Ширяев, В. И. Исследование операций и численные методы оптимизации : учебное пособие для студентов экономических специальностей университетов / В. И. Ширяев. – 4-е изд. – М. : Ленанд, 2015. – 212 с.

Учебное издание

Лопатнюк Людмила Анатольевна,
Марков Александр Сергеевич,
Подашевская Елена Игоревна

ЭКОНОМЕТРИКА
И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ. ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *О. Л. Сапун*
Редактор *Д. А. Значёнок*
Корректор *Д. А. Значёнок*
Компьютерная верстка *Д. А. Значёнок*
Дизайн обложки *Д. О. Бабаковой*

Подписано в печать 11.11.2019. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 98 экз. Заказ 468.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/359 от 09.06.2014.
№ 2/151 от 11.06.2014.
Пр-т Независимости, 99–2, 220023, Минск.