МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

*Учебно-методический комплекс для студентов
очной и заочной форм обучения по специальностям:
1-74 06 01 Техническое обеспечение процессов
сельскохозяйственного производства,
1-74 06 02 Техническое обеспечение процессов хранения
и переработки сельскохозяйственной продукции,
1-74 06 03 Ремонтно-обслуживающее производство
в сельском хозяйстве,
1-36 12 01 Проектирование и производство
сельскохозяйственной техники*

Минск
БГАТУ
2010

УДК 531.2(07)
ББК 22.21я7
Т33

*Рекомендовано научно-методическим советом агромеханического факультета БГАТУ.
Протокол № 11 от 26 января 2009 года*

Составитель – кандидат технических наук, доцент *Н. Л. Ракова*

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов и деталей машин» БГАТУ *В. А. Агейчик;*
кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории «Виброзащита механических систем» ГНУ «Объединенного института машиностроения» НАН Беларуси *А. М. Гоман*

Т33 **Теоретическая механика. Статика** : учебно-метод. комплекс / сост. Н. Л. Ракова. – Минск: БГАТУ, 2010. – 112 с.
ISBN 978-985-519-204-7.

В учебно-методическом комплексе представлены материалы по изучению раздела «Статика», входящего в состав дисциплины «Теоретическая механика». Включает курс лекций, основные материалы по выполнению практических занятий, задания и образцы выполнения заданий для самостоятельной работы и контроля учебной деятельности студентов очной и заочной форм обучения.
Предназначается для студентов и учащихся агроинженерных специальностей.

УДК 531.2(07)
ББК 22.21я7

ISBN 978-985-519-204-7

СОДЕРЖАНИЕ

МОДУЛЬ 0

Введение в дисциплину

Теоретическая механика – наука о законах механического движения, равновесия и взаимодействия материальных тел.

Это одна из фундаментальных общенаучных физико-математических дисциплин. Она является теоретической основой современной техники.

Изучение теоретической механики, наряду с другими физико-математическими дисциплинами, способствует расширению научного кругозора, формирует способности к абстрактному мышлению и повышению общей технической культуры будущего специалиста.

Теоретическая механика, являясь научной базой всех технических дисциплин, способствует развитию навыков рациональных решений инженерных задач, связанных с эксплуатацией, ремонтом и конструированием сельскохозяйственных и мелиоративных машин и оборудования.

Дисциплина состоит из трех разделов: «Статика твердого тела, пространственная и плоская система сил», «Кинематика точки и твердого тела. Сложное движение точки», «Динамика материальной точки и механической системы. Общие теоремы динамики», «Принципы механики».

В учебно-методическом комплексе (УМК) представлены материалы по изучению раздела «Статика», который включает курс лекций, основные материалы для проведения практических работ, задания и образцы выполнения для самостоятельных работ и контроля учебной деятельности студентов очной и заочной форм обучения.

В результате изучения раздела «Статика» студент должен ***знать*** условия равновесия плоской, пространственной и сходящейся систем сил; ***уметь*** определять проекции силы на оси и плоскость, величину моментов сил относительно точки и оси, значения реакций в опорах.

Учебной программой дисциплины «Теоретическая механика» предусмотрено общее количество аудиторных часов – 136, в т.ч. 32 часа на изучение раздела «Статика».

МОДУЛЬ 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ РАЗДЕЛА «СТАТИКА»

1. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «СТАТИКА»

1.1. Глоссарий

Абсолютно твердое тело – тело, расстояния между точками которого не изменяются.

Активные – заданные силы, приложенные к телу, могущие вызвать его ускорение.

Внешние силы – силы, с которыми другие тела действуют на данное тело.

Внутренние силы – силы, с которыми части одного тела действуют друг на друга.

Главный вектор системы сил – величина R, равная геометрической сумме всех сил.

Главный момент системы сил относительно этого центра – величина $\overline{M_0}$, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O.

Статика – раздел механики, в котором излагается общее учение о силах, изучается приведение сложных систем сил к простейшему виду и устанавливаются условия равновесия различных систем сил.

Равновесие – состояние покоя тела по отношению к другому телу, выбранному за неподвижное, или его равномерное прямолинейное движение.

Равнодействующая – сила, эквивалентная данной системе сил.

Распределенная сила – силы, приложенные вдоль тела по какому-либо закону. Величина силы, приходящейся на единицу длины, определяет интенсивность q распределенной нагрузки.

Реакция связи – сила, с которой связь действует на тело, препятствуя перемещению тела.

Связь – все то, что препятствует перемещению тела в каком-либо направлении.

Сосредоточенная сила – сила, приложенная к какой-либо точке твердого тела.

Сила – мера механического взаимодействия тел, характеризующая его интенсивность и направленность.

Сходящиеся силы – силы, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Свободное тело – тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве.

Уравновешенная (эквивалентная нулю) – система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.

Уравновешивающая – сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой.

Эквивалентные системы – если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются эквивалентными.

1.2.Темы лекций и их содержание

Тема 1. Равновесие тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил.

Введение в дисциплину. Понятие о силе, распределенные и сосредоточенные силы. Типы связей и их реакции. Проекция силы на ось и плоскость.

Аналитический способ сложения сходящихся сил. Момент силы относительно точки и оси.

Литература: [1], стр. 31–57; [2], стр. 15–33.

Тема 2. Системы сходящихся сил

Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей**.** Теорема о равнодействующей системы сходящихся сил. Теорема о равновесии тела, находящегося под действием системы сходящихся сил.

Литература: [1], стр. 62–69; [2], стр. 35–49.

Тема 3. Пара сил и ее момент

Свойства пары сил. Условия равновесия пар.

Литература: [1], стр. 88–94; [2], стр. 50–56.

Тема 4. Условия равновесия тел, находящихся под действием сил, расположенных в одной плоскости.

Равновесие плоской системы сил. Равновесие плоской системы параллельных сил.

Литература: [1], стр. 98–119; [2], стр. 58–66.

Тема 5. Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил.

Равновесие пространственной системы параллельных сил. Равновесие произвольной пространственной системы сил.

Литература: [1], стр. 163–196; [2], стр. 103–127.

Тема 6. Равновесие системы тел

Равновесие системы тел.

Литература: [1], стр. 118–122; [2], стр. 73–78.

1.3. Основной текст

Тема 1
Равновесие тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил

Понятие о силе. Распределенные и сосредоточенные силы

Сила – это мера механического действия на данное тело со стороны других тел, характеризующая величину и направление этого действия.

Действие силы на рассматриваемое тело определяется тремя факторами:

- точкой приложения;
- направлением;
- численным значением.

В Международной системе единиц (СИ) в качестве единицы силы используется Ньютон.

Совокупность сил, приложенных к телу, называют ***системой сил***. Если систему сил можно заменить одной силой так, что при

этом движение тела не изменится, то такая сила называется равнодействующей системы сил.

Силы, приложенные к какой-нибудь одной точке тела, называются ***сосредоточенными***.

Силы, действующие на некоторую часть линии, площади или объема тела, называются ***распределенными***.

Распределенные силы характеризуются интенсивностью q. Интенсивность силы, приложенной к линии, представляет собой силу, приходящуюся на единицу длины линии. Она измеряется в Ньютонах на метр – Н/м.

При решении задач статики распределенные силы, как правило, заменяют сосредоточенными равнодействующими силами.

Распределенную нагрузку с постоянной интенсивностью можно заменить сосредоточенной силой, равной произведению интенсивности на длину участка действия распределенной нагрузки:

$$Q = ql\,, \qquad (1)$$

и приложенной к середине участка приложения этой распределенной нагрузки (рисунок 1).

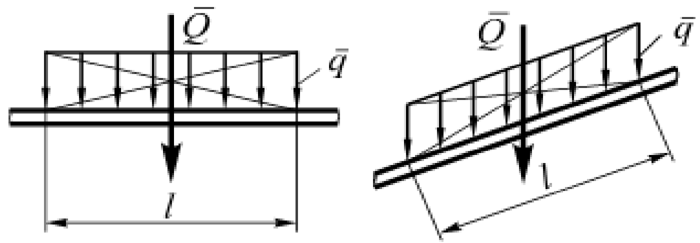


Рисунок 1

Если распределенная сила изменяется по закону треугольника, то значение равнодействующей сосредоточенной силы определяется формулой:

$$Q = q_{\max}\frac{1}{2}\,, \qquad (2)$$

а ее линия действия проходит через точку пересечения медиан треугольника, изображающего закон изменения нагрузки, на расстоянии $\frac{l}{3}$ от основания (рисунок 2).

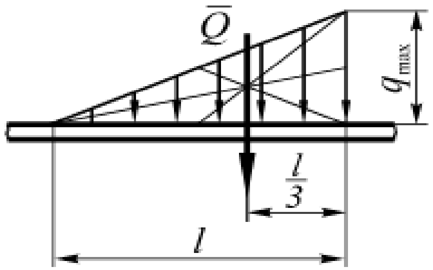


Рисунок 2

Типы связей и их реакции

Все силы, действующие на тела, делятся на активные и силы реакций механических связей.

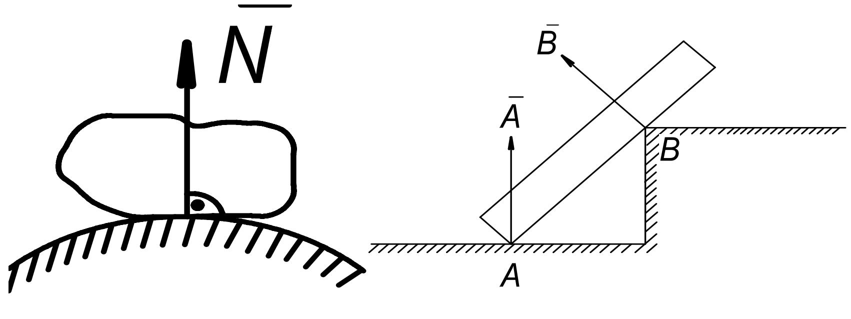
Активные – заданные силы, приложенные к телу, вызывающие его ускорение.

Тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются **механическими связями**. Силы, которыми связи действуют на рассматриваемое тело, называются **реакциями связей**.

Рассмотрим виды механических связей, наиболее часто встречающихся на практике.

Гладкая поверхность – это поверхность без трения. Такая поверхность не дает перемещаться телу только по направлению главной нормали к соприкасающимся поверхностям в точке касания (рисунок 3, *а*). Поэтому реакция N гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел.

Если одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рисунок 3, *б*), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.



а *б*

Рисунок 3

Нить (трос, канат, цепь) препятствует перемещению тела. Поэтому реакция направлена вдоль нити к точке ее подвеса (нить работает только на растяжение) (рисунок 4).

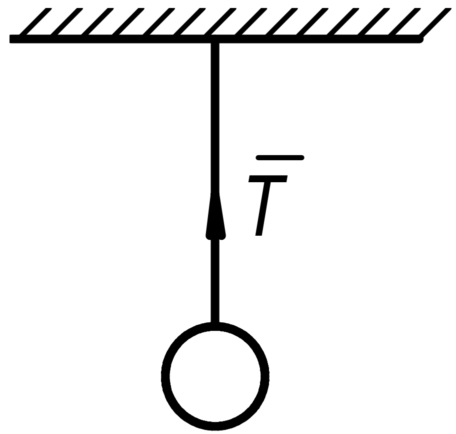


Рисунок 4

Жесткий невесомый стержень с двух сторон имеющий шарниры. В этом случае реакции связей направлены вдоль стержня. При решении задач считать:

стержень растянут;

реакция направлена внутрь стержня (рисунок 5).

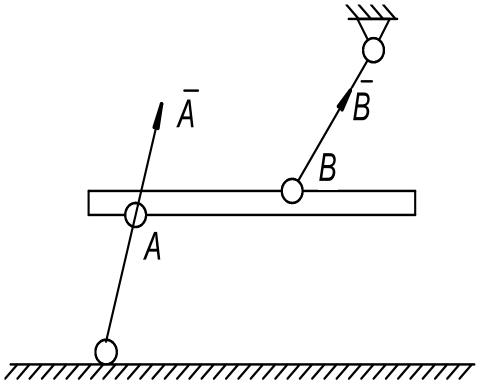
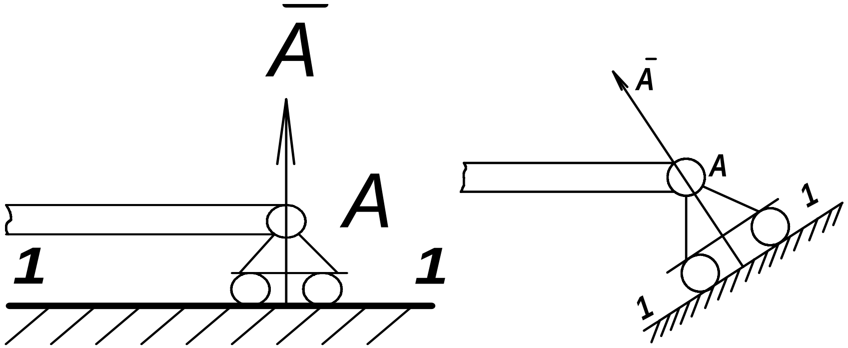


Рисунок 5

Шарнирно-подвижная опора (каток) препятствует перемещению тела только в направлении, перпендикулярном плоскости 1–1, соответственно реакция *A* направлена перпендикулярно плоскости опоры (рисунок 6, *а*, *б*).



а *б*

Рисунок 6

Цилиндрический шарнир представляет собой соединение твердых тел, допускающее их относительное вращение. Реакция цилиндрического шарнира *A* может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического шарнира. Как правило, при решении задач определяется не сама сила, а ее проекции на оси координат A_x и A_y (рисунок 7).

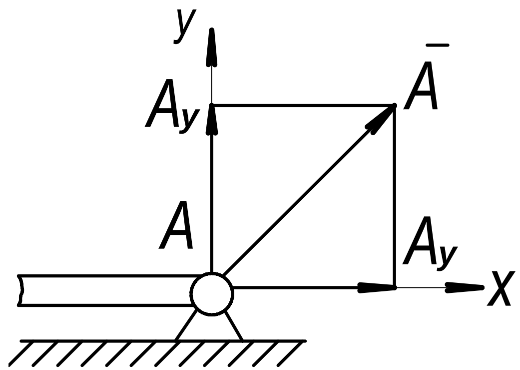


Рисунок 7

Жесткая заделка – препятствует любому перемещению тела в горизонтальном и вертикальном направлениях, а также не дает возможности поворота, поэтому в заделке возникают две силы реакции, направленные по двум осям (A_x и A_y), и реактивный момент M_A (рисунок 8).

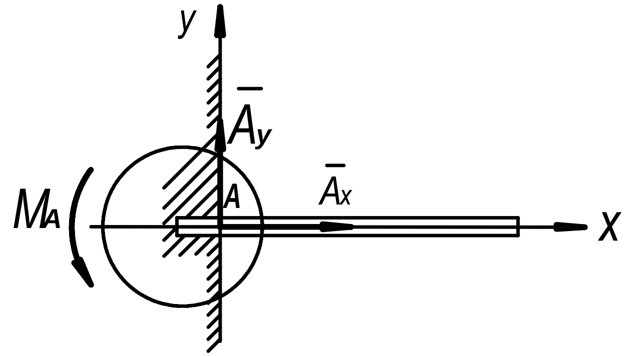


Рисунок 8

Цилиндрический шарнир (подшипник) не допускает перемещения связываемого тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Поэтому его реакция лежит в этой плоскости. При решении задач рассчитывают проекции оси реакции цилиндрического шарнира на две оси координат (рисунок 9).

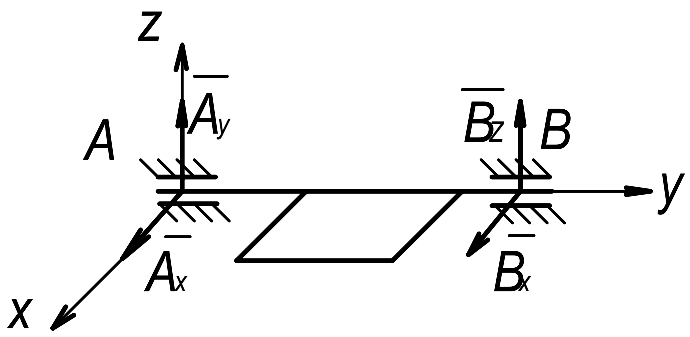
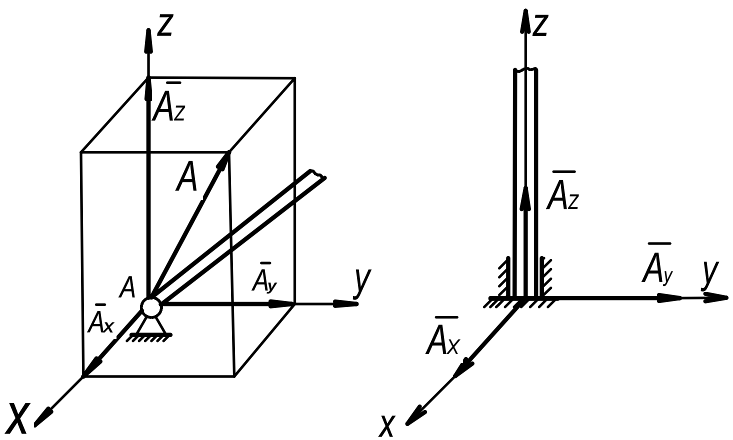


Рисунок 9

Сферический шарнир. Подпятник закрепляет одну точку тела и допускает лишь его поворот вокруг этой точки. Точно также подпятник не допускает перемещения связанной точки тела. Поэтому реакции этих связей направляются произвольным образом в пространстве. При решении задач вычисляются, как правило, проекции реакций сферического шарнира и подпятника на оси координат (рисунок 10, *а*, *б*).



а *б*

Рисунок 10

Вопросы для повторения

1. Можно ли определить силу, задав только величину силы и ее точку приложения?
2. Если распределенные силы изменяются по линейному закону, то будет ли такая нагрузка равномерно распределенной?

Проекция силы на ось и плоскость. Аналитический способ сложения сходящихся сил

Проекцией силы на ось (как и любого вектора) называется направленный отрезок на оси (рисунок 11), заключенный между перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора на ось.

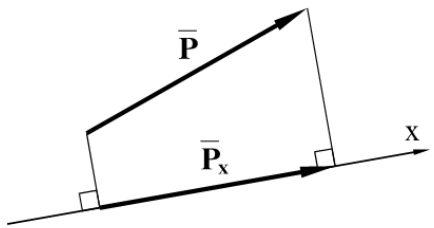


Рисунок 11

$$P_x = P\cos\alpha. \tag{3}$$

Величина проекции вектора на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. Из определения видно, что проекция силы на ось может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю (рисунок 12).

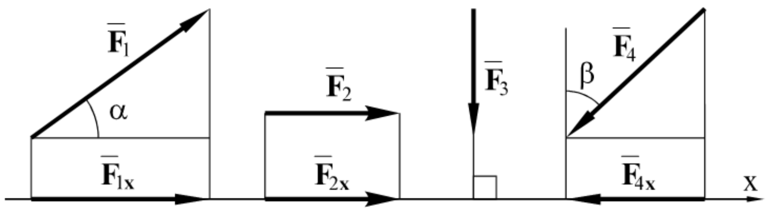


Рисунок 12

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha; \quad F_{2x} = F_2 \cos 0 = F_2;$$
$$F_{3x} = F_3 \cos 90 = 0; \quad F_{4x} = -F_4 \cos(90 - \beta) = -F_4 \sin\beta. \qquad (4)$$

При решении многих задач приходится иметь дело с силами, лежащими в трехмерном пространстве. В этом случае для определения осевых проекций сил используют ***метод двойного проецирования***.

Для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось (рисунок 13).

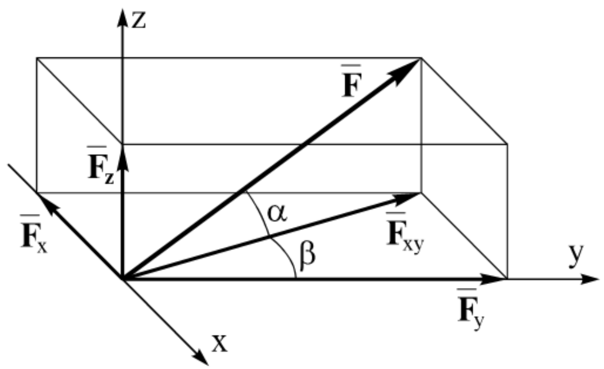


Рисунок 13

$$F_{xy} = F \cos\alpha;$$
$$F_x = -F_{xy} \cos(90 - \beta) = -F \cos\alpha \sin\beta; \qquad (5)$$
$$F_y = F_{xy} \cos\beta = F \cos\alpha \cos\beta.$$

Для нахождения равнодействующей системы сил $\left\{\overline{F}_1,\ \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right\}$ спроецируем силы, входящие в силовой многоугольник на оси декартовых координат. Тогда проекции равнодействующей на оси координат равны соответственно:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k;$$
$$R_x = \sum F_{kx},\ R_y = \sum F_{ky},\ R_z = \sum F_{kz}, \qquad (6)$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ \cos\alpha = R_x / R, \cos\beta = R_y / R, \cos\gamma = R_z / R. \end{cases} \qquad (7)$$

Момент силы относительно точки

Моментом силы относительно точки называется произведение модуля силы на ее плечо:

$$M_0\left(\overline{F}\right) = Fh. \qquad (8)$$

Плечо силы – это длина перпендикуляра, опущенного из точки, относительно которой определяется момент, на линию действия силы.

Если сила стремится повернуть тело по отношению к точке против хода часовой стрелки, то момент силы относительно этой точки считается положительным, в противном случае – отрицательным. Если линия действия силы проходит через данную точку, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

Например, моменты сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ относительно точки A (рисунок 12) соответственно равны:

$$M_A\left(\overline{F_1}\right) = F_1 h_1; \qquad M_A\left(\overline{F_2}\right) = -F_2 h_2; \qquad M_A\left(\overline{F_3}\right) = 0.$$

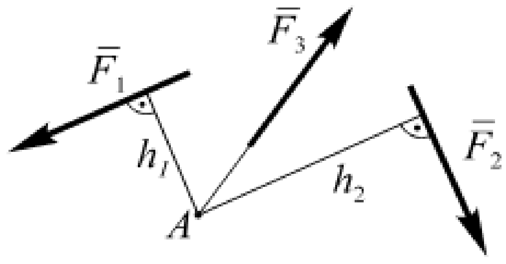


Рисунок 14

В случаях, когда нахождение плеча затруднено, для вычисления момента силы относительно точки целесообразно использовать **теорему Вариньона** (момент равнодействующей силы относительно некоторой точки равен алгебраической сумме моментов сил, составляющих систему, относительно той же точки):

$$M_0\left(\overline{R}\right)=\sum M_0\left(\overline{F_i}\right). \tag{9}$$

При решении задач (для нахождения момента относительно точки с помощью теоремы Вариньона) силу раскладывают на составляющие, моменты которых относительно рассматриваемой точки легко определяются. Затем искомый момент получают как алгебраическую сумму моментов составляющих.

Пример 1. Определить момент силы F, действующий на балку AB, если сила F составляет угол α с прямой AD (рисунок 15).

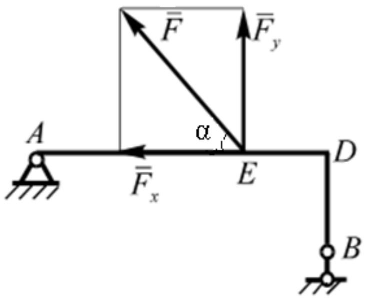


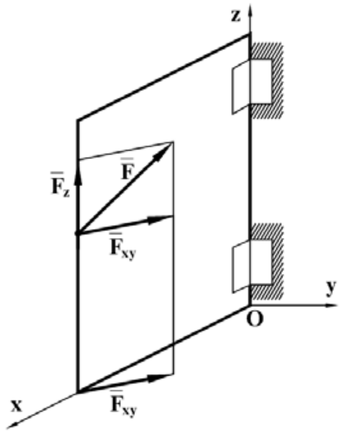
Рисунок 15

$$M_B\left(\overline{F}\right)=M_B\left(\overline{F_x}\right)+M_B\left(\overline{F_y}\right)=F_x\cdot BD-F_y\cdot DE=$$
$$F\cos\alpha\cdot BD-F\sin\alpha\cdot DE.$$

Момент силы относительно оси

Предположим, что к телу, которое может поворачиваться вокруг неподвижной оси Oz, приложена сила $\overline{F}$. Разложим ее на две составляющие, одна из которых $\overline{F}_z$ параллельна оси z, а вторая $\overline{F}_{xy}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oz. Проекция $\overline{F}_z$ стремится переместить тело вдоль оси Oz, но не способствует его вращению (рисунок 16).

Следовательно, действие силы $\overline{F}$ на закрепленную на оси дверь, направленное на ее поворот, определяется величиной и направлением составляющей $\overline{F}_{xy}$. Количественной мерой этого действия является момент силы относительно оси (рисунок 17).



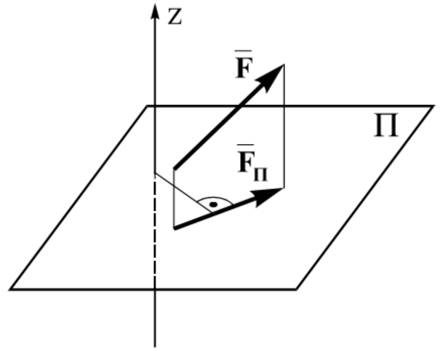


Рисунок 16 Рисунок 17

Правило его вычисления следующее.

Чтобы определить момент силы относительно оси, нужно эту силу спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси, и найти момент проекции силы относительно точки пересечения оси и плоскости.

Этот момент считается положительным, если при наблюдении с положительного конца оси сила поворачивает тело против хода стрелки часов, и отрицательным – в противном случае.

$$M_z\left(\overline{F}\right)=M_{oz}\left(\overline{F_{xy}}\right)=hF_{xy}; \tag{9}$$

$$M_{oz}\left(\overline{F}\right)=yF_z-zF_y;$$
$$M_{oy}\left(\overline{F}\right)=zF_x-xF_z; \tag{10}$$
$$M_{oz}\left(\overline{F}\right)=xF_y-yF_x.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает эту ось. Эти два случая могут быть объединены в один: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Пример 2. Определить момент силы F = 100 Н относительно точек A, C, B. Сила действует по диагонали прямоугольника $ABCD$, где BC = 3 м, AC = 4 м (рисунок 18) .

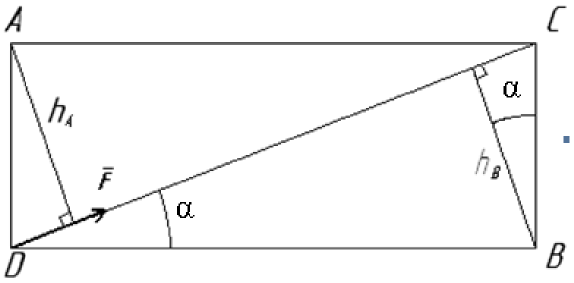


Рисунок 18

Решение. Определим плечо силы относительно точек A и B. Для этого опускаем перпендикуляр на линию действия силы (прямую CD) из точек A и B (рисунок 18):

$$h_A = AD\cos\alpha;$$

$$h_B = BC\cos\alpha.$$

$$\text{Из } \Delta\, BCD : \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0{,}8;$$

$$h_A = h_B = 3\cdot 0{,}8 = 2{,}4 \text{ м, так как } AD = BC = 3 \text{ м.}$$

$$M_A\left(\overline{F}\right) = Fh_A = 100\cdot 2{,}4 = 240 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$M_B\left(\overline{F}\right) = Fh_B = -100\cdot 2{,}4 = -240$ Н·м (момент силы F относительно точки B отрицательный, так как сила F стремится повернуться относительно точки B по ходу часовой стрелки);

$M_C\left(\overline{F}\right) = Fh_C = 0$, так как $h_C = 0$.

Ответ: $M_A\left(\overline{F}\right) = 240$ Н·м, $M_B\left(\overline{F}\right) = -240$ Н·м, $M_C\left(\overline{F}\right) = 0$.

Пример 3. Определить момент силы F = 40 Н относительно осей координат и относительно начала координат, если сторона куба равна 0,5 м (рисунок 19).

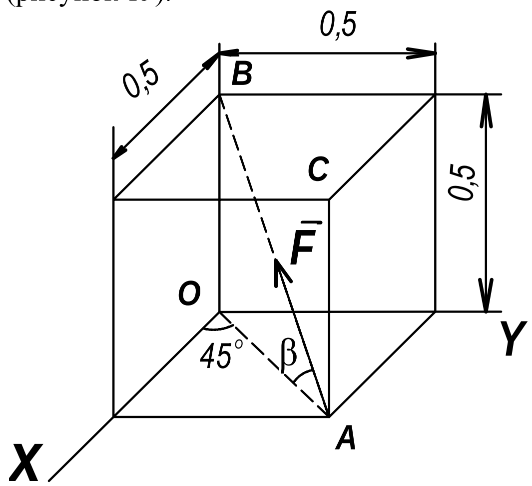


Рисунок 19

Решение.

I способ. По формулам (10) найдем проекции векторного момента на оси координат:

$$M_{ox}\left(\overline{F}\right) = y_A F_z - z_A F_y;$$
$$M_{oy}\left(\overline{F}\right) = z_A F_x - x_A F_z;$$
$$M_{oz}\left(\overline{F}\right) = x_A F_y - y_A F_x.$$

Найдем координаты точки A и проекции силы F на оси координат:

$$\cos\beta = \frac{OA}{AB} = \frac{0{,}707}{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}707^2}} = 0{,}866;$$

$$\sin\beta = 0{,}5;$$

$x_A = 0,5$ м, $y_A = 0,5$ м, $z_A = 0$.

$F_x = -F\cos\beta\cos 45^\circ = -40 \cdot 0,87 \cdot 0,707 = -24,5$ Н;

$F_y = -F\cos\beta\cos 45^\circ = -24,5$ Н;

$F_z = F\sin\beta = 20$ Н.

Тогда

$$M_{ox}\left(\overline{F}\right) = 0,5 \cdot 20 - 0\left(-24,5\right) = 10 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{oy}\left(\overline{F}\right) = 0\left(-24,5\right) - 0,5 \cdot 20 = -10 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{oz}\left(\overline{F}\right) = 0,5\left(-24,5\right) - 0,5\left(24,5\right) = 0;$$

$$M_o\left(\overline{F}\right) = \sqrt{\left(M_{ox}\left(\overline{F}\right)\right)^2 + \left(M_{oy}\left(\overline{F}\right)\right)^2} = 14,14 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

II способ. Определим моменты силы F относительно осей координат по формуле (9).

Спроектируем силу F на плоскость, перпендикулярно осям X, Y, Z:

$F_{xy} = F\cos\beta = 17,32$ Н, $\overline{F_{xy}} \perp OZ$,

$F_{zy} = F\sin\beta = 20$ Н, $\overline{F_{zy}} \perp OY$, $\overline{F_{zy}} \perp OX$.

Получим

$M_x\left(\overline{F}\right) = 0,5F_{zy} = 10$ Н · м,

$M_y\left(\overline{F}\right) = -0,5F_{zy} = -10$ Н · м,

$M_Z\left(\overline{F}\right) = OF_{XY} = 0$ (так как $\overline{F}_{XY}$ пересекает ось Z, то момент силы $\overline{F}$ относительно оси Z равен нулю).

Результаты, полученные обоими способами, совпадают.

Ответ.

$M_x\left(\overline{F}\right) = M_{ox}\left(\overline{F}\right) = 10$ Н · м,

$M_y\left(\overline{F}\right) = M_{oy}\left(\overline{F}\right) = -10$ Н · м,

$M_Z\left(\overline{F}\right) = M_{OZ}\left(\overline{F}\right) = 0$,

$M_o\left(\overline{F}\right) = 14,14$ Н · м.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение алгебраического момента силы относительно точки.
2. Как определить плечо силы относительно точки?
3. В каком случае момент силы считают положительным, а в каком – отрицательным?
4. Сформулируйте определение момента силы относительно оси.
5. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?

Тема 2

Система сходящихся сил

Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются ***сходящимися силами.***

Исследование систем сходящихся сил выполняется при решении ряда практических задач, в числе которых расчет ферм.

Теорема о равнодействующей системы сходящихся сил. Система сходящихся сил эквивалентна одной силе, которая равна геометрической сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Теорема о равновесии тела, находящегося под действием системы сходящихся сил.

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая, а, следовательно, и главный вектор этих сил были равны нулю.

$$\overline{R} = 0. \qquad (1)$$

Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической формах.

1. Геометрическое условие равновесия: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

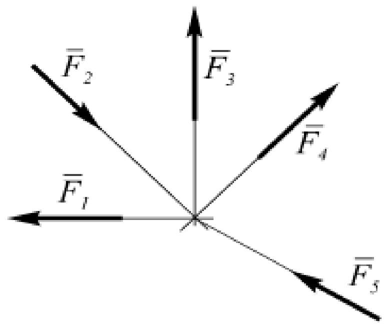


Рисунок 20

2. Аналитические условия равновесия. Векторному условию (1) соответствуют равенства:

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0. \qquad (2)$$

Воспользовавшись выражением проекций равнодействующей через проекции сил системы, получаем аналитические условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0. \qquad (3)$$

Равенства (3) выражают условия равновесия в аналитической форме: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Теорема о трех силах. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

При решении задач на равновесие несвободного твердого тела под действием сходящейся системы сил необходимо придерживаться следующей последовательности.

1. Изобразить исследуемые тела с наложенными на них механическими связями.

2. Показать все действующие на тело активные силы и реакции связей.

3. Выбрать систему координат так, чтобы они составляли известные или легко определяемые углы со всеми векторами рассматриваемых сил.

4. Записать условие равновесия, соответствующее полученной системе сил, то есть спроектировать на оси координат активные силы и реакции связей и приравнять их к нулю.

Пример решения задач

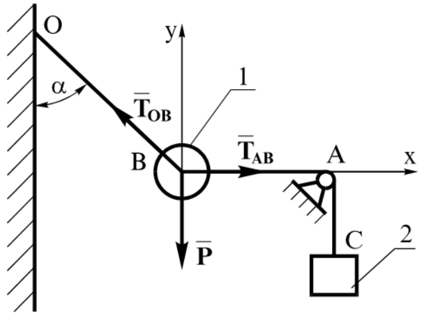


Рисунок 21

Задача 1. Груз 1 веса P подвешен на гибком нерастяжимом тросе OB, отклоненном от вертикали на угол α, и удерживается в равновесии с помощью другого гибкого нерастяжимого троса BAC, обхватывающего идеальный блок A и несущего на свободном конце груз 2 (рисунок 21). Считая, что при рав новесии участок троса AB горизонтален, определить вес Q груза 2 и натяжение троса OB. Размерами груза 1 и весом тросов пренебречь.

Решение. Поскольку заданные и искомые силы действуют на груз 1, это тело является узловым. Поэтому на рисунке показываются силы, действующие на него: активная сила $\overline{P}$ и силы реакции нити $\overline{T}_{OB}$ и $\overline{T}_{AB}$.

По условию трение на блоке отсутствует, поэтому $T_{AB} = Q$. На тело 1 действует система сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, поэтому составляем два уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad T_{AB} - T_{OB} \sin\alpha = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \quad T_{OB} \cos\alpha - P = 0.$$

Из них находим: $T_{OB} = \dfrac{P}{\cos\alpha}$ и $T_{AB} = Q = P \cdot \mathrm{tg}\alpha.$

Задача 2. На середину балки AB действует сила P. В точке A балка имеет шарнирно-неподвижную опору, а в точке B – шарнирно-подвижную опору (рисунок 22). Определить линию действия реакции в точке A.

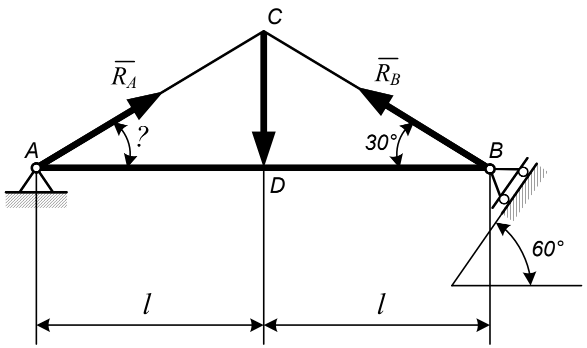


Рисунок 22

Решение. Реакция $\overline{R}_B$ шарнирно-неподвижной опоры перпендикулярна опорной поверхности и пересекается с линией действия силы P в точке C. По теореме о трех непараллельных силах реакция опоры A должна пройти через эту точку:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{CD}{AD}, \quad AD = l, \quad CD = l \cdot \mathrm{tg}30^\circ;$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{l \cdot \mathrm{tg}30^\circ}{l} = \mathrm{tg}30^\circ,$$

$\alpha = 30^\circ.$

Ответ. Реакция $\overline{R}_A$ образует угол 30° с осью балки AB.

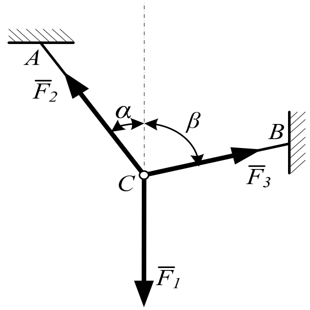
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение системы сходящихся сил.
2. Как найти равнодействующую системы сходящихся сил графическим методом?
3. Сформулируйте условие равновесия системы сходящихся сил.
4. Сформулируйте геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.
5. Сформулируйте аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил.
6. Сформулируйте теорему о трех непараллельных силах.

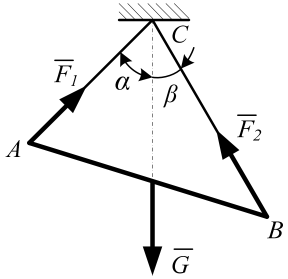
Задачи для самостоятельного решения

Равновесие плоской системы сходящихся сил

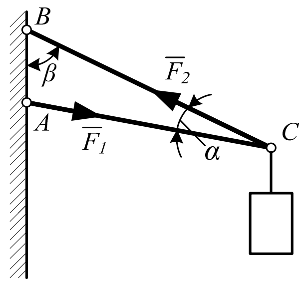
Задача 1. Силы $F_1 = F_2 = 10$ Н и $\overline{F_3}$ находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по 120°. Определить модуль силы $\overline{F_3}$. (10)



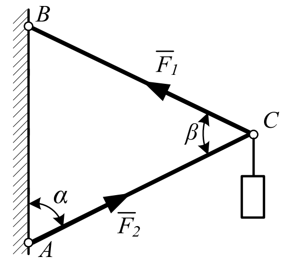
2. Определить модуль силы $\overline{F_3}$ натяжение троса BC, если известно, что натяжение троса AC равно $F_2 = 15$ Н. В положении равновесия углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 75°$. (7,76)



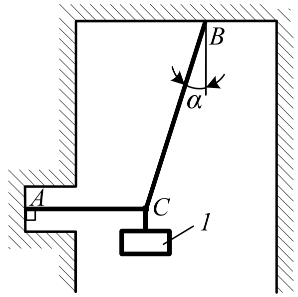
3. Определить вес балки AB, если известны силы натяжения веревок $F_1 = 120$ Н и $F_2 = 80$ Н. Заданы углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 30°$ между вертикалью и веревками AC и BC соответственно. (154)



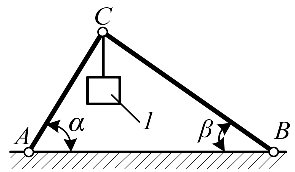
4. Груз удерживается в равновесии стержнями AC и BC, шарнирно соединенными в точках A, B и C. Стержень BC растянут силой $F_2 = 45$ Н, а стержень AC сжат силой $F_1 = 17$ Н. Определить вес груза, если заданы углы $\alpha = 15°$ и $\beta = 60°$. (18,1)



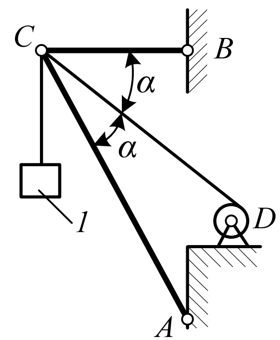
5. Шарнирный трехзвенник ABC удерживает в равновесии груз, подвешенный к шарнирному болту C. Под действием груза стержень AC сжат силой $F_2 = 25$ Н. Заданы углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$. Считая стержни AC и BC невесомыми, определить усилия в стержне BC. (48,3)



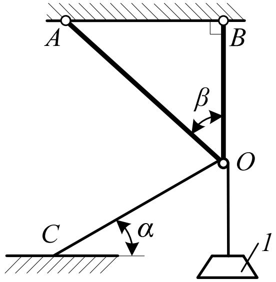
6. Груз *1* весом 2 Н удерживается в равновесии двумя веревками AC и BC, расположенными в вертикальной плоскости. Определить натяжение веревки BC, если угол $\alpha = 30°$. (2,31)



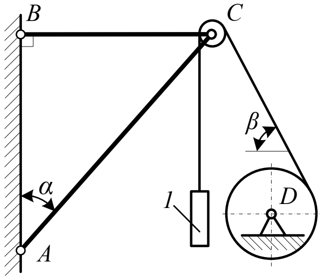
7. Два невесомых стержня AC и BC соединены в точке C и шарнирно прикреплены к полу. К шарниру C подвешен груз *1*. Определить реакцию стержня BC, если усилие в стержне AC равно 43 Н, углы $\alpha = 60°$ и $\beta = 30°$. (–24,8)



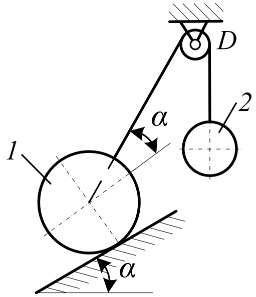
8. Определить реакцию стержня AC, удерживающего в равновесии груз *1* весом 14 Н с помощью цепи, намотанной на барабан D и перекинутой через блок C, если угол $\alpha = 30°$. (–24,2)



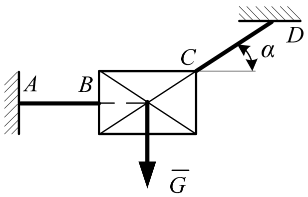
9. Груз *1* весом 20 Н, подвешенный на канате, удерживается в равновесии стержнями *AO* и *BO*, расположенными в вертикальной плоскости. Другой конец каната закреплен в точке *C*. Определить реакцию стержня *OA*, если углы $\alpha = 40°$ и $\beta = 45°$. (–21,7)



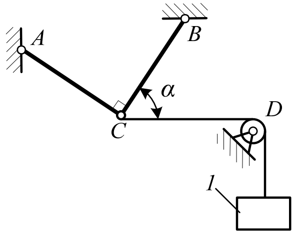
10. Груз *1* весом 10 Н подвешен с помощью каната, перекинутого через блок *C* и намотанного на барабан лебедки *D*. Определить усилие в стержне *AC*, если углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 60°$. (–26,4)



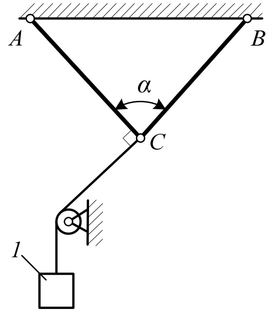
11. Шар *1* весом 16 Н и шар *2* связаны нитью, перекинутой через блок *D*, и удерживаются в равновесии. Определить вес шара *2*, если угол $\alpha = 30°$. (9,24)



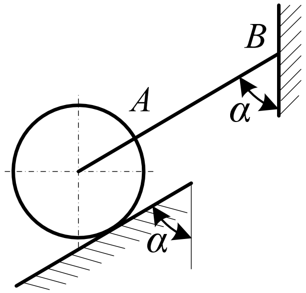
12. Пластина весом *G* = 8 Н удерживается в равновесии двумя канатами *AB* и *CD*, расположенными в вертикальной плоскости. Определить натяжение каната *CD*, если угол $\alpha = 30°$. (16)



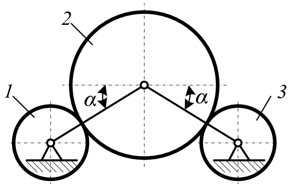
13. Два стержня *AC* и *BC* соединены шарнирно в точке *C*, к которой через блок *D* подвешен груз *1* весом 12 Н. Определить реакцию стержня *BC*, если угол $\alpha = 60°$. (–6)



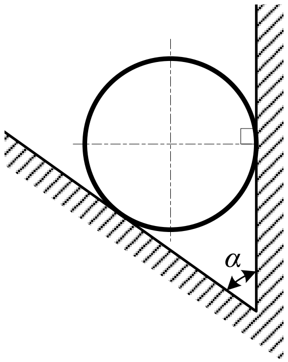
14. Груз *1* весом 6 Н удерживается в равновесии двумя стержнями *AC* и *BC* равной длины, соединенными шарнирно в точке *C*. Определить реакцию стержня *AC*, если угол $\alpha = 60°$, усилие в стержне *BC* равно 6,94 Н. (–3,45)



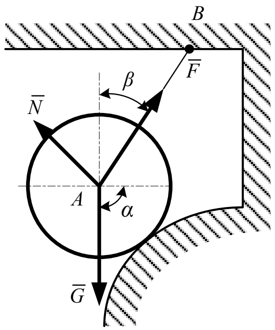
15. Однородный шар весом 12 Н удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости с помощью веревки *AB*. Определить давление шара на плоскость, если угол $\alpha = 60°$. (10,4)



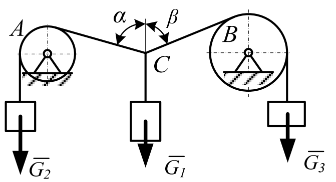
16. Однородный шар *2* весом 36 Н опирается на ролики *1* и *3*. Определить давление шара на ролик *1*, если угол $\alpha = 45°$. (25,5)



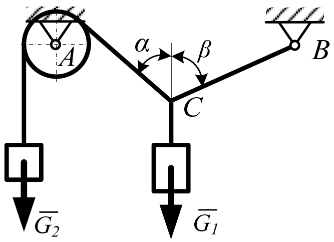
17. Однородный шар весом 40 Н опирается на две плоскости, пересекающиеся под углом α = 60°. Определить давление шара на наклонную плоскость. (46,2)



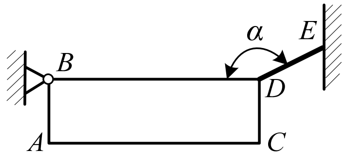
18. Цилиндр весом $\overline{G}$ удерживается в равновесии с помощью веревки *AB*. Нормальная реакция опорной поверхности $\overline{N} = 40$ Н. Определить натяжение веревки $\overline{F}$, если известны углы α = 45°, β = 30°. (56,6)



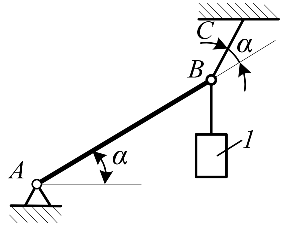
19. Грузы весом $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$ и $\overline{G_3}$ находятся в равновесии. Известны вес груза $\overline{G} = 55$ Н и углы α = 45°, β = 30°. Определить вес груза $\overline{G_3}$. (61,3)



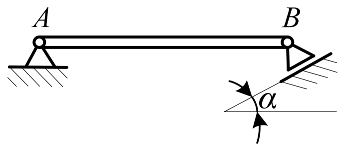
20. Два груза весом $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ находятся в равновесии. Определить натяжение веревки *BC*, если известны вес груза G_2 = 90 Н и углы α = 45°, β = 30°. (73,5)



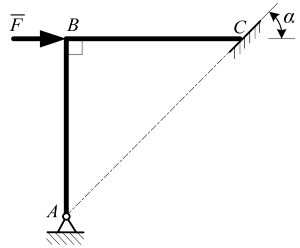
21. Горизонтальный брус весом 200 Н удерживается в равновесии с помощью шарнира *B* и веревки *DE*, образующей угол α = 150° со стороной *BD*. Определить реакцию шарнира *B*, если известно соотношение линейных размеров – 4*AB* = *AC*. (200)



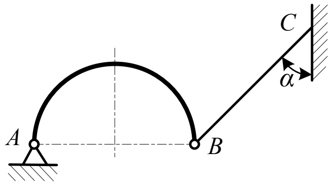
22. Один конец стержня *AB* закреплен шарнирно в точке *A*. К другому концу *B* привязан груз *1* весом 50 Н. Стержень удерживается в равновесии *BC*. Определить реакцию веревки *BC*, если угол α = 30°. (86,6)



23. Вес однородной горизонтальной балки *AB* равен 180 Н. Задан угол α = 45°. Определить реакцию шарнира *A*. (127)



24. Изогнутый стержень *ABC* прикреплен к полу посредством шарнира *A*, а другой его конец *C* свободно опирается на гладкую поверхность, образующую угол α = 45°. Определить реакцию шарнира *A*, если на стержень действует сила *F* = 10 Н. (7,07)



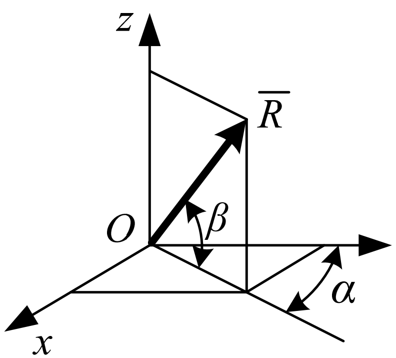
25. Один конец A криволинейного бруса AB весом 5 Н закреплен в шарнире A, а к другому концу B привязана веревка BC. Определить реакцию шарнира A, если угол $\alpha = 45°$. (3,54)

Сложение и разложение сходящихся сил в пространстве

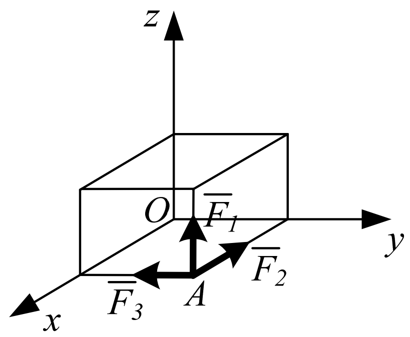
1. По заданным проекциям силы $\overline{F}$ на оси координат: $F_x = 20$ Н, $F_y = 25$ Н и $F_z = 30$ Н, определить модуль этой силы. (43,9)

2. Определить косинус угла между вектором силы $\overline{F}$ и осью координат O_z, если сила (Н) $\overline{F} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}$. (0,707)

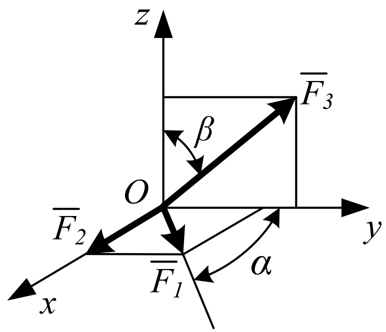
4. Определить косинус угла между вектором силы (Н) $\overline{F} = 3\bar{i} + 2{,}45\bar{j} + 7\bar{k}$ и осью координат Ox. (0.375)



4. Модуль равнодействующей силы $\vec{R}$ пространственной системы сходящихся сил равен 150 Н. Определить ее проекцию на координатную ось O_y, если даны углы $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$. (65)



5. Определить модуль равнодействующей сил $F_1 = 12$ Н, $F_2 = 10$ Н и $F_3 = 9$ Н, приложенных в точке A, как показано на рисунке. (18,0)

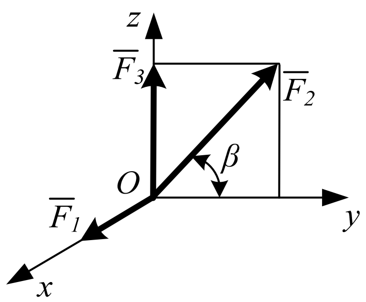


6. Определить модуль равнодействующей сил $F_1 = 15$ Н, $F_2 = 20$ Н и $F_3 = 25$ Н. Углы, образованные линиями действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$ с осями координат, заданы: $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. (50,5)

7. Направление равнодействующей трех сил $R = 33{,}8$ Н задано косинусами направляющих углов: $\cos\left(R \hat{\ } x\right) = 0{,}325$; $\cos\left(R \hat{\ } y\right) = 0$; $\cos\left(R \hat{\ } z\right) = 0{,}946$. Проекции сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ на координатные оси соответственно равны: $F_{1x} = 7$ Н; $F_{1y} = 10$ Н; $F_{1z} = 0$; $F_{2x} = -5$ Н; $F_{2y} = 15$ Н; $F_{2z} = 12$ Н. Определить модуль силы $\overline{F}_3$. (32,6)

8. Определить модуль равнодействующей трех сходящихся сил, если заданы их проекции на оси координат: $F_{1x} = 7$ Н; $F_{1y} = 10$ Н; $F_{1z} = 0$; $F_{2x} = -5$ Н; $F_{2y} = 15$ Н; $F_{2z} = 12$ Н; $F_{3x} = 6$ Н; $F_{3y} = 0$; $F_{3z} = -6$ Н. (26,9)

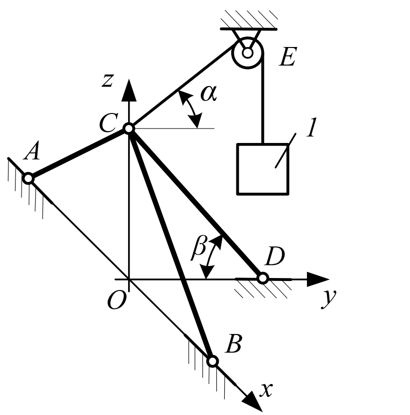
9. Две силы (Н) $F_1 = 5\bar{i} + 7\bar{j} + 9\bar{k}$ и $F_2 = 4\bar{i} + 9\bar{j} + 11\bar{k}$ приложены в центре O система прямоугольных координат $Oxyz$. Определить модуль равнодействующей силы. (27,1)



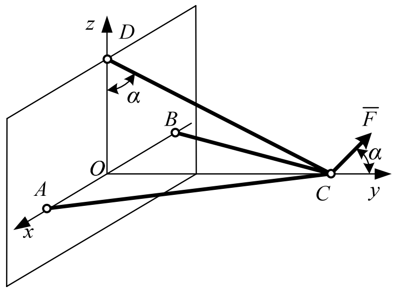
10. Определить модуль равнодействующей трех сходящихся сил, если заданы их модули: F_1 = 5 кН, F_2 = 12 кН, F_3 = 9 кН и угол β = 60°. (20,9)

Равновесие пространственной системы сходящихся сил

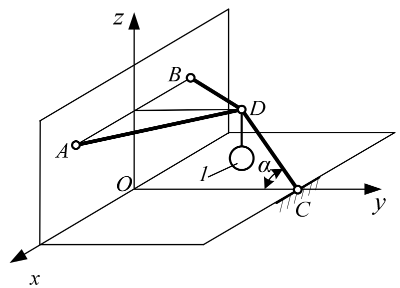
1. Силы $F_1 = F_2 = F_3$ = 30 Н направлены по трем взаимно перпендикулярным осям координат. Могут ли они быть уравновешены силой F_4 = 51,96 Н? (Да)



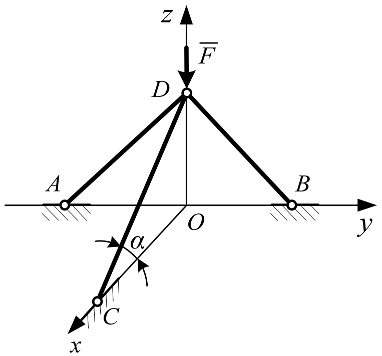
2. Груз *1* весом 60 Н удерживается в равновесии стержнями *AC, BC* и *DC,* шарнирно соединенными в точке *C*, и веревкой, переброшенной через блок *E* под углом α = 60°. Определить усилие в стержне *DC,* если угол β = 45°. (–73,5)



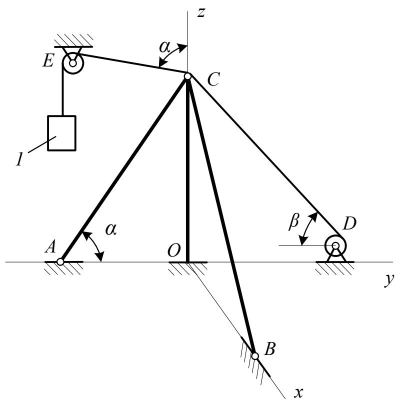
3. Три стержня *AC, BC* и *DC* соединены шарнирно в точке *C*. Определить усилие в стержне *DC*, если заданы сила *F* = 50 Н и угол α = 60°. Сила *F* находится в плоскости *Oyz*. (–86,6)



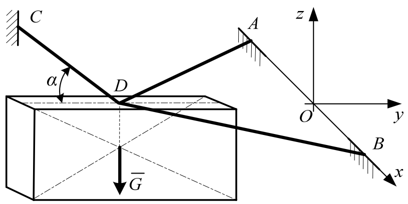
4. Три стержня *AD, BD* и *CD* соединены в шарнире *D*. Определить усилие в стержне *CD*, если груз *1* имеет вес 20 Н, угол α = 45°. (–28,3)



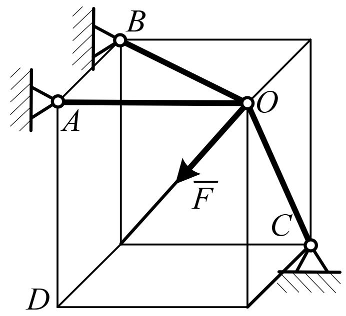
5. Три стержня *AD, BD* и *CD* соединены в точке *D* шарнирно. Определить усилие в стержне *CD*, если сила *F* = 8 Н находится в плоскости *Oyz* и угол α = 20°. (0)



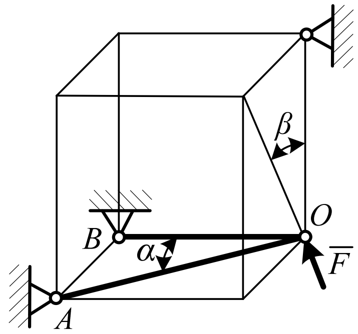
6. Для подъема тяжелых деталей применяется тренога *AOCB* и лебедка *D.* Определить усилие в стержне *AC,* если вес поднимаемого груза *1* равен 60 Н, трос *DCE* лежит в плоскости *Oyz*, углы α = 60°, β = 45°. (–19,1)



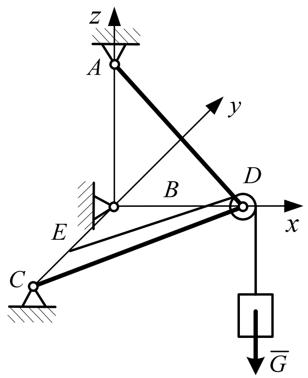
7. Однородная плита весом *G* = 100 Н удерживается в равновесии в плоскости чертежа тремя тросами *AD, BD* и *CD*. Определить усилие в тросе *CD,* если угол α = 30°. Трос *CD* лежит в плоскости *Oyz*. (200)



8. Три стержня *AO, BO* и *CO* соединены в шарнире *O*. Определить реакцию стержня *CO*, возникающую под действием силы *F* = 12 Н, приложенной к шарниру *O*, если расстояния *AB* = *AO* = *AD*. (13,9)



9. Три стержня *AO, BO* и *CO* шарнирно-стержневой конструкции соединены в точке *O,* к которой приложена сила *F* = 18 Н. Определить усилие в стержне *AO,* если углы α = 60°, β = 45°. (–25,5)



10. Определить усилие в невесомом стержне *CD*, если дан вес груза *G* = 200 Н, известны длины сторон шарнирно-стержневой конструкции *CE* = *BE* = 2 м и *AB* = *BD* = 4 м. (–127)

Тема 3
Пара сил и ее момент

Пара сил – это система двух равных по модулю, параллельных и противоположных по направлению сил.

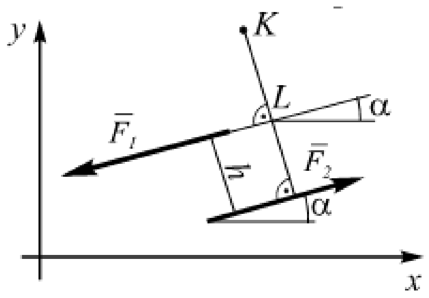


Рисунок 23

Из рисунка 23 видно, что сумма проекций сил пары на оси координат всегда равна нулю:

$$\sum F_{ix} = -F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = 0.$$

Найдем сумму моментов сил пары относительно произвольной точки плоскости K:

$$M_K = -F_1 \cdot KL + F_2 \cdot \left(KL + h\right) = F_2 h\,. \qquad (1)$$

Из полученного выражения видно, что результат не зависит от расстояния KL (следовательно, от положения точки K), а определяется только расстоянием h. Расстояние h между линиями действия сил пары называют ***плечом пары.***

Момент пары считается положительным, если она стремится повернуть тело при действии на него против хода часовой стрелки, и отрицательным – если поворот происходит по ходу часовой стрелки.

На расчетных схемах для обозначения пар сил применяются символы:

либо


.

Свойства пары сил

1. Не нарушая действия пары сил на абсолютно твердое тело, ее можно повернуть в своей плоскости на произвольный угол.
2. Не изменяя действия пары на твердое тело, можно менять величину входящей в нее силы и длину плеча, но так, чтобы момент пары оставался неизменным.
3. Не изменяя действия пары на абсолютно твердое тело, можно менять плоскость пары на любую параллельную ей плоскость.
4. Совокупность пар, как угодно расположенных в пространстве, статически эквивалентна одной паре с моментом, равным векторной сумме моментов слагаемых пар.

Условия равновесия пар

Для равновесия пар сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы момент эквивалентной (результирующей) пары был равен нулю.

$$\overline{M} = \sum \overline{M}_k = 0. \qquad (2)$$

Задача 1. Найти результирующую пару, которая уравновесила бы две пары сил с моментами M_1 = 14 Н·м, M_2 = 40 Н·м, приложенные к балке AB длиной 2 м (рисунок 24).

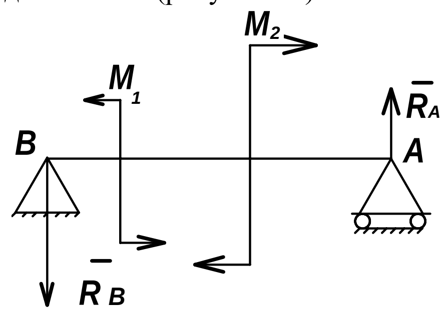


Рисунок 24

Решение. Используя принцип освобождаемости от связей, заменим действие опор на балку реакциями R_A и R_B. Вектор силы $\overline{R}_A$ перпендикулярен опорной поверхности. Вектор силы $\overline{R}_B$ должен быть параллелен $\overline{R}_A$, так как они должны образовать эквивалентную результирующую пару.

Исходя из условия равновесия пар сил, запишем:

$$M_1 - M_2 + M\left(\overline{R}_A, \overline{R}_B\right) = 0,$$

$$M\left(\overline{R}_A, \overline{R}_B\right) = M_2 - M_1 = 40 - 14 = 26 \text{ Н·м}.$$

Так как дана длина балки, то можно найти силы, образующие результирующую пару:

$$R_A = R_B = \frac{M\left(\overline{R}_A, \overline{R}_B\right)}{AB} = 13 \text{ Н}.$$

Ответ. $M\left(\overline{R}_A, \overline{R}_B\right) = 26 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Величина результирующего момента получилась с плюсом. Это означает, что направление реакций в точках A и B выбрано правильно.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое пара сил?
2. Можно ли пару сил заменить равнодействующей?
3. Чем характеризуется пара сил?
4. Сформулируйте свойства пар сил.
5. Сформулируйте условия равновесия пар сил.

Тема 4
Условия равновесия тел, находящихся под действием сил, расположенных в одной плоскости

Равновесие плоской системы сил

Основной задачей статики является изучение равновесия тел под действием приложенных к ним сил.

Равновесием тела называют состояние его покоя или движения, при котором все точки тела двигаются равномерно прямолинейно.

Количество уравнений, составляемых при решении задач о равновесии тел, зависит от расположения векторов сил, приложенных к рассматриваемому телу.

Для равновесия тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси, лежащие в плоскости действия сил, и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной точки плоскости равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

При решении задач о равновесии тела, на которое действует произвольная плоская система сил, можно использовать и иные наборы уравнений, включающие:

– равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \quad \left(A \notin BC\right) \\ \sum M_{iC} = 0; \end{cases} \qquad (2)$$

– равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил системы относительно двух любых точек и алгебраической суммы их проекций на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через две выбранные точки:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum F_{ix} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

При решении задач о равновесии тел с применением приведенных уравнений целесообразно придерживаться следующей последовательности действий.

1. Изображаются исследуемые тела с наложенными на них механическими связями.

2. Выявляется узловое тело системы. Под узловым телом понимается тело, на которое действуют известные силы и силы, подлежащие определению.

3. На рисунке изображаются векторы активных сил, приложенных к узловому телу.

4. Определяются виды механических связей, наложенных на узловое тело, и расставляются векторы соответствующих сил реакций связей.

5. Проводятся оси координат так, чтобы они составляли известные или легко определяемые углы со всеми векторами рассматриваемых сил.

6. Устанавливается вид системы сил, приложенной к узловому телу, и составляются уравнения равновесия, соответствующие полученной системе сил.

7. Путем решения системы уравнений равновесия определяются величины, подлежащие определению по решению задачи.

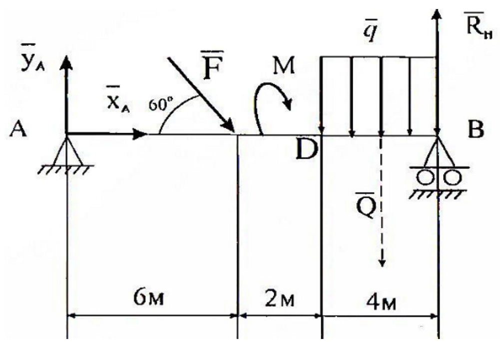


Рисунок 25

Задача 1. Определить реакции опор, если F = 10 кН, q = 2 кН/м, M = 3 кН/м (рисунок 25).

Решение. Рассмотрим равновесие балки AB под действием силы F, момента M, равномерно распределенной нагрузки и реакций связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_B$. Составим три уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $Q = 4\,q = 8$ кН, которая приложена в середине участка BD.

1. $\sum F_{kx} = X_A + F\cos 60^\circ = 0$;

2. $\sum F_{xy} = Y_A - F\cos 30^\circ - Q + R_B = 0$;

3. $\sum M_A\left(\overline{F}_k\right) = -6F\cos 30^\circ - M - 10Q + 12R_B = 0$.

Находим из 1:

$$X_A = -F\cos 60^\circ = -10\cdot 0,5 = -5 \text{ кН},,$$

из 3:

$$R_B = \frac{6F\cos 30^\circ + M + 10Q}{12} = \frac{10\frac{\sqrt{3}}{2}6 + 3 + 8\cdot 10}{12} = 11,25 \text{ кН};$$

из 2:

$$Y_A = F\cos 30^\circ + Q - R_B = -10\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11,25 = 5,41 \text{ кН}.$$

Ответ. X_A = –5 кН, Y_A = –5, 41 кН, R_B = 11,25 кН.

Минус показывает, что направление X_A противоположно направлению, показанному на рисунке 25.

Равновесие плоской системы параллельных сил

Для плоской системы параллельных сил можно составить два уравнения равновесия. Если силы параллельны оси y, то уравнения равновесия имеют вид:

первая форма уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0; \end{cases} \qquad (4)$$

вторая форма уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Задача 2. Определить реакции опор, если P = 6 кН, q = 1 кН/м, M = 4 кН/м (рисунок 26).

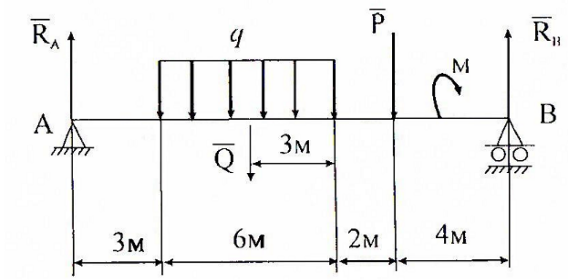


Рисунок 26

Решение. Рассмотрим равновесие балки AB под действием силы P, момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и реакции связей $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$. Составим два уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей Q = 6q = 6 кН, которая приложена к середине нагруженного участка:

1. $\sum F_{xy} = R_A + R_B - Q - P = 0;$

2. $\sum M_A\left(\overline{F}_k\right) = -6Q - 11P - M + 15R_B = 0.$

Находим из 2:

$$R_B = \frac{6Q + 11P + M}{15} = \frac{6 \cdot 6 + 6 \cdot 11 + 4}{15} = 7{,}07 \text{ кН};$$

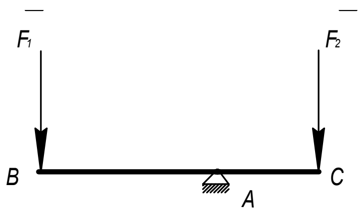
из 1:

$$R_A = -R_B + Q + P = -7{,}07 + 6 + 6 = 4{,}93 \text{ кН}.$$

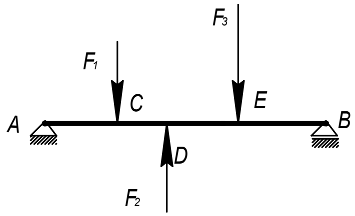
Ответ. $R_A = 4{,}93$ кН, $R_B = 7{,}07$ кН.

Задачи для самостоятельного решения

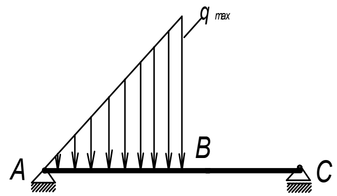
Равновесие плоской системы параллельных сил



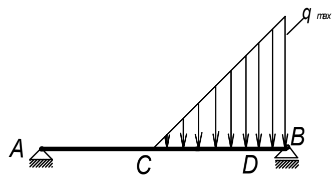
1. На брус BC, закрепленный в шарнире A, действуют вертикальные силы F_1 = 4 кН и F_2. Определить силу F_2 в кН, необходимую для того, чтобы брус в положении равновесия был горизонтальным, если расстояние AC = 2 м, AB = 6 м. (12,0)



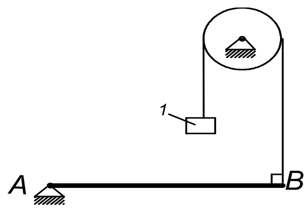
2. На балку AB действуют вертикальные силы F_1 = 1 кН, F_2 = 2 кН и F_3 = 3 кН. Определить в кН реакцию опоры B, если расстояния AC = CD = DE = 1 м, BE = 2 м. (1,2)



3. Определить реакцию опоры C, если интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 120 Н/м, размеры: AB = 4,5 м, BC = 1,5 м. (135)

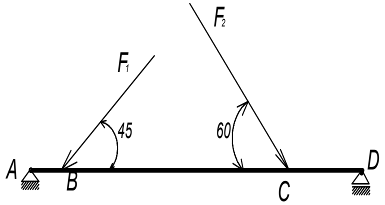


4. Какой должна быть интенсивность q_{max} распределенной нагрузки для того, чтобы реакция опоры B равнялась 200 Н, если размеры AC = 2 м, CD = 3 м, DB = 1 м. (200)

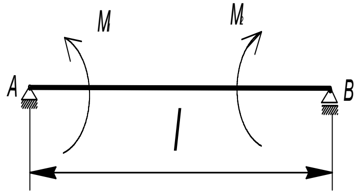


5. Определить вес груза *1*, необходимый для того, чтобы однородная балка AB весом 340 Н в положении равновесия была горизонтальной. (170)

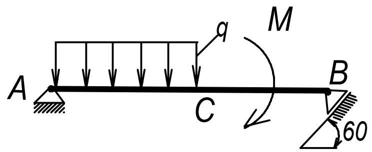
Равновесие произвольной плоской системы сил



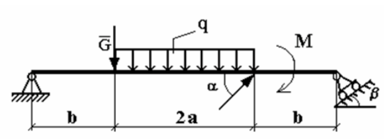
1. Определить реакцию опоры D, если силы F_1 = 84,6 Н, F_2 = 208 Н, размеры AB = 1 м, BC = 3 м, CD = 2 м. (130)



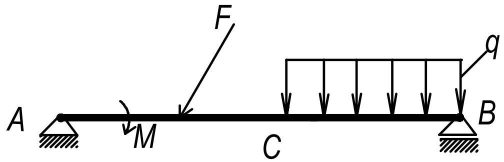
2. На балку, длина которой l = 3 м, действуют пары сил с моментами M_1 = 2 кН·м, M_2 = 8 кН·м. Определить модуль реакции опоры B. (2)



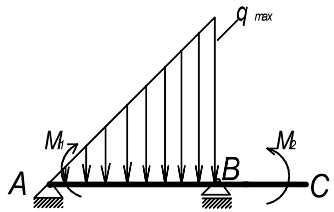
3. Определить момент M пары сил, при котором реакция опоры B равна 250 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q = 150 Н/м, размеры $AC = CB$ = 2 м. (200)



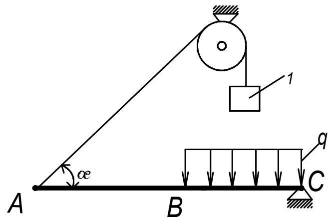
4. Определить интенсивность распределенной нагрузки q, при которой реакция шарнира B будет равна 346 Н, если сила G = 50 кН, F = 20 кН, α = 60°, a = 3 м, b = 2 м.



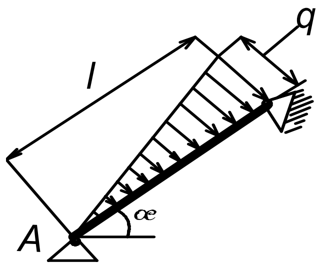
5. На однородную балку AB, вес которой G = 20 кН действует распределенная нагрузка интенсивностью q = 0,5 кН/м. Определить в кН реакцию опоры A, если момент пары сил M = 13 кН/м, а сила F = 10 Н.



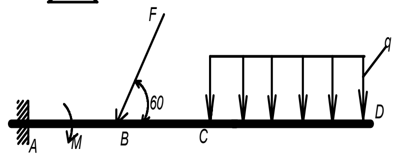
6. На балку AC действуют распределенная нагрузка интенсивностью q_{max} = 2,5 Н/м и пары сил с моментами M_1 = 4 Нм и M_2 = 2 Нм. Определить реакцию опоры B, если длина AB = 4 м, BC = 0,5 AB. (3.83)



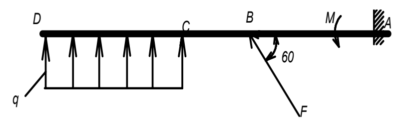
7. Балка AC закреплена в шарнире C и поддерживается в горизон-тальном положении веревкой AD, перекинутой через блок. Определить интенсивность распределен-ной нагрузки q, если длины BC = 5 м, AC = 8 м, угол α = 30°, а вес груза 1 равен 20 Н. (9,05)



8. Определить реакцию опоры A, если длина балки l = 0,3 м, интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 20 Н/м, угол α = 30°. (2,0)



9. К балке AD приложена пара сил с моментом M = 200 Нм, распределенная нагрузка интенсивностью q_{max} = 20 Н/м и сила F. Какой должна быть эта сила для того, чтобы момент в заделке A равнялся 650 Нм, если размеры $AB = BC = CD$ = 2 м? (144)



10. Определить интенсивность q распределенной нагрузки, при которой момент в заделке A равен 546 Нм, если сила F = 173 Н, момент пары сил M = 42 Нм, размеры $AB = CD$ = 2 м, BC = 1 м. (36,0)

Тема 5
Равновесие тела
под действием произвольной пространственной системы сил

Для равновесия тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат и суммы моментов всех сил относительно этой оси:

$$\begin{cases}\sum F_{ix}=0;\\ \sum F_{iy}=0;\\ \sum F_{iz}=0;\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\sum M_{ix}=0;\\ \sum M_{iy}=0;\\ \sum M_{iz}=0.\end{cases} \qquad (1)$$

Пример 1.

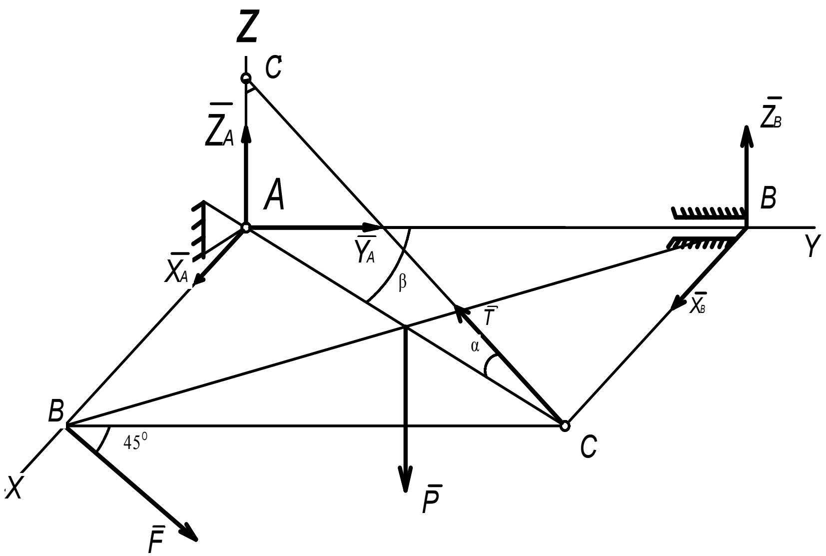


Рисунок 27

Прямоугольная однородная плита весом P удерживается в горизонтальном положении тросом CC'. Определить реакции связей, если P = 100 Н, F = 40 Н, α = 30°, β = 60°, $F//zAy$ (рисунок 27).

Решение. Используя принцип освобождаемости от связей, заменим действие связей реакциями, приложенными к плите. В точке A (сферический шарнир) будут три составляющие: $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$. В точке B – две составляющие: $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$. Реакцию нити T направим по линии CC'. Для уравновешенной произвольной пространственной системы сил составим шесть уравнений равновесия:

1. $\sum F_{kx} = X_A + X_B - T\cos\alpha\sin\beta = 0;$

2. $\sum F_{ky} = Y_A + F\cos 45^\circ - T\cos\alpha\cos\beta = 0;$

3. $\sum F_{kz} = Z_A + Z_B + T\sin\alpha - P - F\cos 45^\circ = 0;$

4. $\sum M_x\left(\overline{F}_k\right) = -P\dfrac{AB}{2} + Z_B AB + AB\cdot T\sin\alpha = 0;$

5. $\sum M_y\left(\overline{F}_k\right) = AD\cdot F\sin 45^\circ + P\dfrac{AD}{2} - AD\cdot T\sin\alpha = 0;$

6. $\sum M_z\left(\overline{F}_k\right) = AD\cdot F\cos 45^\circ - X_B AB = 0.$

Находим из 6:

$$X_B = \frac{AD\cdot F\cos 45^\circ}{AD\,\mathrm{tg}\beta} = \frac{40\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\mathrm{tg}60^\circ} = 16{,}33 \text{ Н};$$

из 5:

$$T = \frac{AD\cdot F\sin 45^\circ + P0\cdot 5AD}{AD\sin\alpha} = \frac{40\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 100\cdot 0{,}5}{0{,}5} = 156{,}56 \text{ Н};$$

из 4:

$$Z_B = \frac{P0\cdot 5AB - AB\cdot T\sin\alpha}{AB} = 100\cdot 0{,}5 - 156{,}56\cdot 0{,}5 = -28{,}28 \text{ Н};$$

из 1:

$$X_A = -X_B + T\cos\alpha\sin\beta = -16{,}33 + 156{,}56\cdot\cos 30^\circ\sin 60^\circ = 101{,}09 \text{ Н};$$

из 2:

$$Y_A = -F\cos 45^\circ + T\cos\alpha\cos\beta = -40\frac{\sqrt{2}}{2} + 156{,}56\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = 39{,}51 \text{ Н};$$

из 3:

$$Z_A = -Z_B - T\sin\alpha + P + F\cos 45^\circ = 28{,}28 - 156{,}56\frac{1}{2} + 100 + 40\frac{\sqrt{2}}{2} = 78{,}28 \text{ Н}\cdot$$

Ответ. X_B = 16,33 Н, X_B = –28,28 Н, X_A = 101,09 Н, Y_B = 39,51 Н, Z_A = 78,28 Н, T = 156,56 Н.

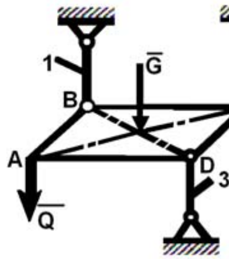
Минус показывает, что направление противоположно направлению, показанному на рисунке 27.

Вопросы для самоконтроля

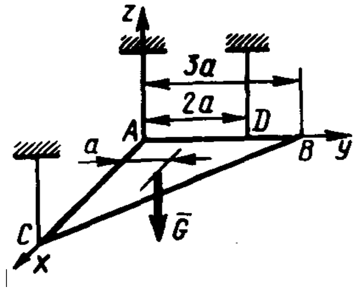
1. Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для произвольной плоской системы сил?
2. Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для плоской системы параллельных сил?
3. Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для произвольной пространственной системы сил?

Задача для самостоятельного решения

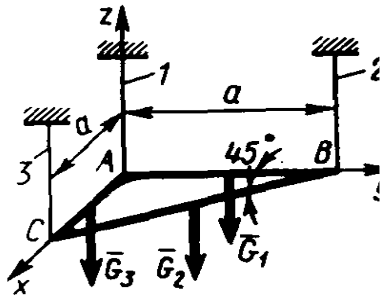
Равновесие пространственной системы параллельных сил



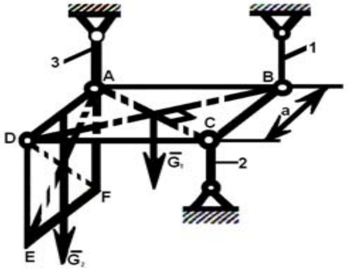
1. Квадратная пластина $ABCD$ весом G = 115 Н в горизонтальном положении закреплена шарнирно в трех вертикальных стержнях 1, 2 и 3. В точке A приложена вертикальная сила Q = 185 Н. Из уравнения равновесия моментов сил относительно оси BD определить усилие в стержне 2. (–185)



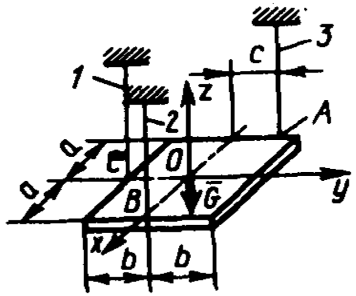
2. Однородная пластина весом G = 500 Н в форме прямоугольного треугольника ABC в горизонтальном положении висит на трех веревках, закрепленных в точках A, C и D. Определить натяжение веревки, привязанной в точке D, если расстояние a = 1 м. (250)



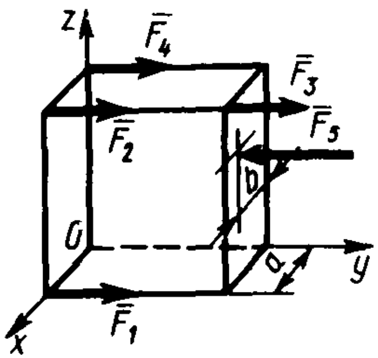
3. Однородная треугольная сварная рама ABC в горизонтальном положении удерживается тремя вертикальными тросами 1, 2 и 3. Определить натяжение троса 3, если вес частей рамы G_1 = G_3 = 101 Н, G_2 = 143 Н. (122)



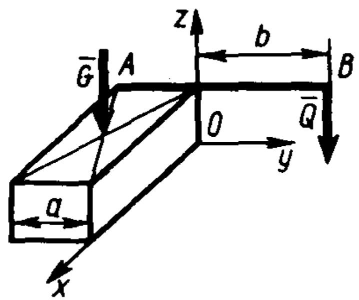
4. Пластинка *ABCD* закреплена в горизонтальном положении с помощью шарниров и трех стержней 1, 2 и 3. Вес пластинки $G_1 = 10$ Н. В точках *A* и *D* к пластинке шарнирно подвешена вторая пластинка шириной $EF = AD$ и весом $G_2 = 8$ Н. Определить усилие в стержне 1, если расстояние $a = 0{,}4$ м. (–4)



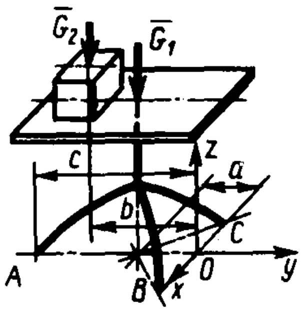
5. Прямоугольная однородная пластинка закреплена горизонтально с помощью трех нитей 1, 2 и 3, закрепленных в точках *A, B* и *C*. Определить расстояние *c* расположения точки *A* от оси симметрии, при котором нити будут натянуты одинаково, если вес пластинки $G = 3$ Н, $a = 0{,}2$ м и $b = 0{,}1$ м. (0,1)



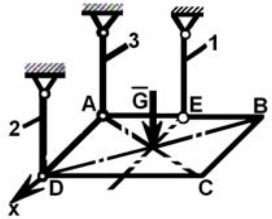
6. К параллелепипеду параллельно оси *Oy* приложена уравновешенная система сил $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 10$ Н и $F_5 = 40$ Н. Определить расстояние *b* силы F_5 от плоскости *Oyz*, если ребро $a = 0{,}4$ м. (0,3)



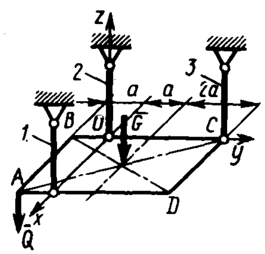
7. К фундаменту весом $G = 100$ кН прикреплена консольная балка $AB \| Oy$. Определить в кН минимальную силу $Q \| Qz$, под действием которой фундамент опрокинется вокруг ребра *Ox*, если его ширина $a = 0{,}5$ м, вылет балки $b = 5$ м. Весом балки пренебречь. (5)



8. На треноге $AB = BC = AC$ покоится горизонтальная платформа с грузом $G_2 = 50$ Н. Вес треноги и платформы $G_1 = 500$ Н. Векторы сил G_1, G_2 и точка *A* находятся в одной вертикальной плоскости. Определить реакцию в точке *A*, если расстояния $a = 0{,}5$ м, $b = 1$ м и $c = 1{,}5$ м. (200)

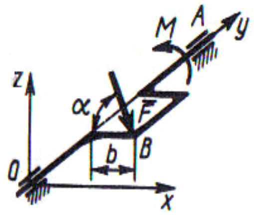


9. Горизонтальная однородная квадратная плита *ABCD* весом $G = 500$ Н подвешена в точках *A, D, E* к трем вертикальным стержням 1, 2, 3. Определить усилие в стержне *1*, если $AD = 2AE$. (500)

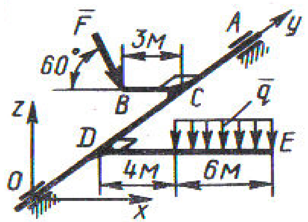


10. Однородная квадратная плита *ABCD* закреплена в горизонтальном положении с помощью трех вертикальных стержней 1, 2 и 3. Определить силу *Q*, которую следует приложить в точке *A*, чтобы стержень 3 не испытывал нагрузку, если $G = 100$ Н, $a = 1$ м. (100)

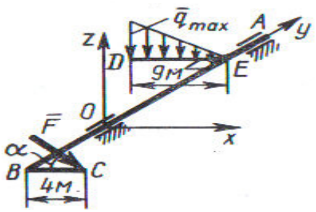
Равновесие произвольной пространственной системы сил



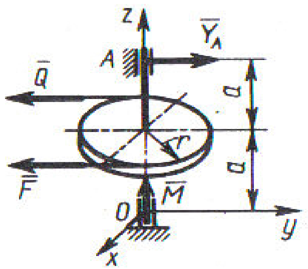
1. К коленчатому валу *OA* в точке *B* под углом α = 60° к горизонту приложена сила *F* = 10 Н, которая уравновешивается парой сил с моментом *M*. Определить модуль момента, если сила *F*||*Oxy* и *b* = 0,9 м. (7,79)



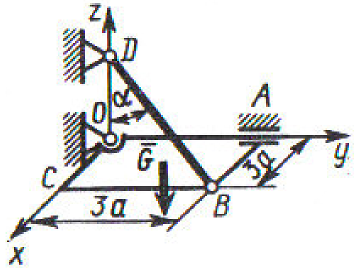
2. К валу *OA* под прямым углом прикреплены стержни *BC* и *OE*. К стержню *DE* приложена распределенная нагрузка *q* = 0,5 Н/м. Определить модуль силы *F*, уравновешивающей данную нагрузку, если *F* ‖ *Oxz*. (8,08)



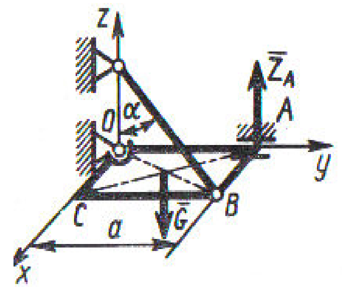
3. К валу *AOB* под прямым углом прикреплены стержень *DE*, несущий распределенную нагрузку *q* = 0,5 Н/м, и стержень *BC*. Нагрузка уравновешивается силой *F* ‖ *Oxz*, приложенной к точке *C* под углом α = 30°. Определить модуль этой силы. (6,75)



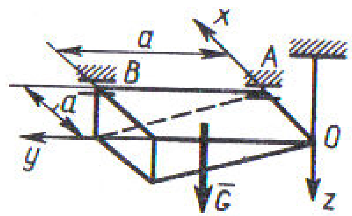
4. Сила *F* = 2*Q* = 120 Н, приложенная к шкиву, уравновешивается парой сил с моментом *M* = 18 Нм. Составив уравнение моментов сил относительно оси *Ox*, определить реакцию Y_A подшипника *A*, если радиус шкива *r* = 0,3 м, *a* = 0,3 м и сила *F* ‖ *Q* ‖ *Oy*. (90)



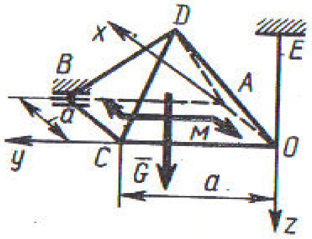
5. Однородная плита *OABC* весом *G* = 30 Н удерживается в горизонтальном положении шарнирами *O*, *A* и тросом *BD*. Определить натяжение троса, если *a* = 2 м и угол α = 60°. (30)



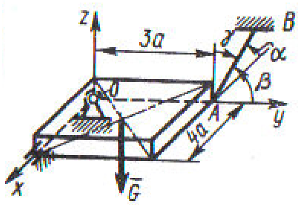
6. Однородная квадратная рама *OABC* со стороною *a* = 0,5 м и весом *G* = 140 Н под действием наложенных связей удерживается в горизонтальном положении. Составить уравнение моментов сил относительно линии *OB* и определить реакцию Z_A шарнира *A*, если угол α = 60°. (0)



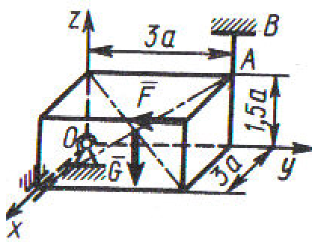
7. Однородное тело весом *G* = 60 Н под действием наложенных связей находится в равновесии. Составив уравнение моментов сил относительно оси *Ox*, определить вертикальную составляющую реакции шарнира *B*, если размер *a* = 0,1 м. (40)



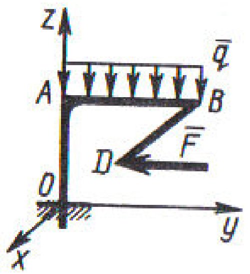
8. Однородная пирамида *OABCD* весом G = 60 Н под действием пары сил с моментом M = 150 Н·м и наложенных связей находится в равновесии. Определить составляющую реакции шарнира *B*, параллельную оси Ox, если размер a = 3 м, а пара сил лежит в плоскости Oxy. (50)



9. Однородная плита весом G = 400 Н под действием наложенных связей находится в равновесии. Составив уравнение относительно оси Ox, определить напряжение троса *AB*, если a = 20 см, углы α = 61°, β = 44° и γ = 60°. (400)



10. Тело весом G = 11 кН под действием наложенных связей и приложенной силы F = 3 кН находится в равновесии. Составить уравнение моментов сил относительно оси *Ox*, затем определить натяжение троса *AB*, если размер a = 0,2 м. (4 · 103)



11. Фигурная балка *OABD* находится в равновесии. Определить составляющую в тоннах реакции заделки вдоль оси *Oz*, если дано: *OA* = 1,7 м, *AB* = 2 м, *BD* = 3,4 м, *BD* ‖ Ox, сила F = 1 т и интенсивность распределенной нагрузки q = 2 т/м. (4)

Тема 6
Равновесие системы тел

Системой тел называется конструкция, состоящая из нескольких твердых тел, взаимодействующих между собой через какие-нибудь связи, допускающие относительные перемещения этих тел (они могут соединяться шарнирами, гибкими нитями, опираться друг на друга и т.п.).

Статически определимые системы – это системы, в которых число неизвестных величин не превышает числа независимых уравнений равновесия для данной системы сил.

Статически неопределимые системы – это системы, в которых число неизвестных величин превышает число независимых уравнений равновесия для данной системы сил.

Силы, действующие на тела системы, делятся на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на тела механической системы со стороны тел, не принадлежащих этой системе.

Внутренними называются силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

При равновесии системы тел, как каждое тело, так и вся система в целом находятся в равновесии. В связи с этим имеется два способа решения задач системы тел, связанных с исследованием равновесия.

1. Поскольку каждое тело системы находится в равновесии, то составляются уравнения равновесия каждого из тел (тогда уравнения равновесия системы в целом могут быть использованы для проверки правильности решения).

2. Сначала записываются уравнения равновесия системы в целом, а затем уравнения равновесия отдельных тел системы (в этом случае нет необходимости в составлении уравнений равновесия, по крайней мере, одного из тел системы, но они могут быть применены для проверки).

Замечания.

1. При составлении уравнений равновесия всей системы в целом она рассматривается как абсолютно твердое тело, поэтому в эти уравнения не войдут силы взаимодействия между отдельными телами системы.

2. Силы, которыми тела системы действуют друг на друга, в соответствии с аксиомой о действии и противодействии (третий закон

Ньютона), равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

3. Если внешняя сила приложена к точке контакта исследуемых тел, ее следует относить только к одному из тел системы.

Пример решения задачи о равновесии системы тел

Задача 1

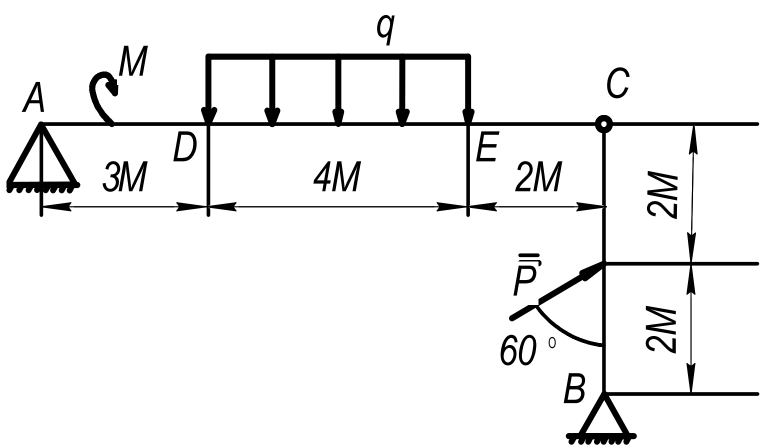


Рисунок 28

Определить реакции опор A, B и шарнира C составной балки, если M = 8 кН/м, q = 2 кН/м, P = 6 кН (рисунок 28).

Решение. Расчленим составную балку по шарниру C и рассмотрим равновесие балки AC под действием момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивности q и реакций $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ шарнирно-неподвижной опоры A, и реакций $\overline{X}_c$, $\overline{Y}_c$ шарнира C (рисунок 29). Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия, заменяя равномерно распределенную нагрузку силой $Q = 4q$ = 8 кН, приложенной к середине нагруженного участка DE. Направление осей координат показано на рисунке 27.

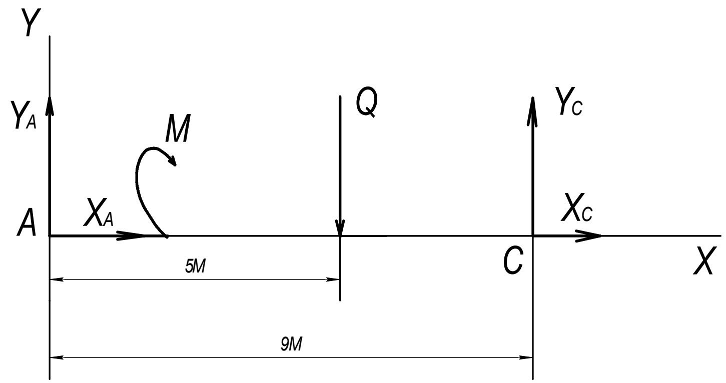


Рисунок 29

1. $\sum F_{kx} = X_A + X_C = 0$.

2. $\sum F_{xy} = Y_A + Y_C - Q = 0$.

3. $\sum M_A(\overline{F}_k) = -M - 5Q + 9Y_C = 0$.

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила $\overline{P}$, реакции $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ шарнирно-неподвижной опоры B и реакции $\overline{X}_C{}'$, $\overline{Y}_C{}'$ шарнира C (рисунок 30).

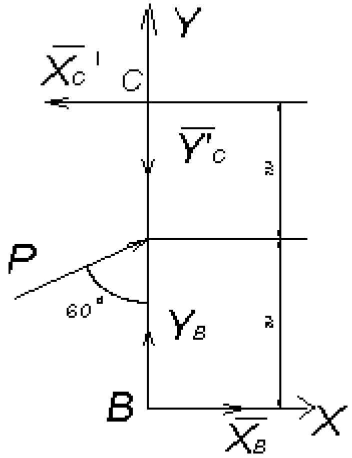


Рисунок 30

На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире C равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X_C', \; Y_C = Y_C',$$

$$\overline{X}_C = -\overline{X}_C', \; \overline{Y}_C = -\overline{Y}_C'.$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

4. $\sum F_{kx} = -X_C' + P\cos 30^\circ + X_B = 0$.

5. $\sum F_{xy} = -Y_C' + P\cos 60^\circ + Y_B = 0$.

6. $\sum M_C\left(\overline{F}_k\right) = 2P\cos 30^\circ + 4X_B = 0$.

Находим из 6:

$$X_B = \frac{2P\cos 30^\circ}{4} = \frac{6\frac{\sqrt{3}}{2}}{4} 2 = -2,61 \text{ кН};.$$

из 4:

$$X_C' = P\cos 30^\circ + X_B = 6\frac{\sqrt{3}}{2} - 2,61 = 2,61 \text{ кН};.$$

из 3:

$$Y_C = \frac{M + 5Q}{9} = \frac{8 + 8\cdot 5}{9} = 5,33 \text{ кН};.$$

из 5:

$$Y_B = Y_C' - P\cos 60^\circ = 5,33 - 6\cdot 0,5 = 2,33 \text{ кН};.$$

из 2:

$$Y_A = -Y_C + Q = -5,33 + 8 = 2,67 \text{ кН};.$$

из 1:

$$Y_A = -X_C = 2,61 \text{ кН}.$$

Ответ. X_A = –2,61 кН, Y_A = 2,67 кН, . X_B = –2,61 кН, Y_B = 2,3 кН, . X_c = 2,61 кН, . Y_c = 5,33 кН.

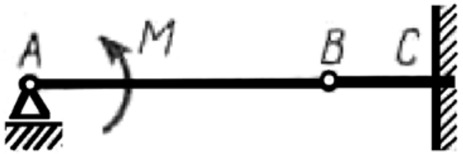
Минус показывает, что реакции $\overline{X}_B$ и $\overline{X}_A$ направлены противоположно направлению, показанному на рисунке 29.

Вопросы для самоконтроля

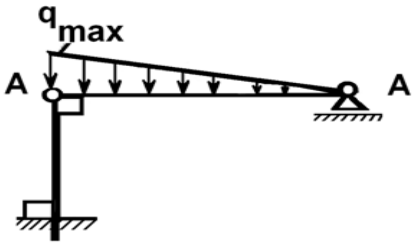
1. Какие системы сил называют статически определимыми?
2. Какие системы сил называют статически неопределимыми?
3. Какие силы называют внешними?
4. Какие силы называют внутренними?
5. Сколько уравнений равновесия можно составить для произвольной плоской системы, состоящей из N тел?

Задачи для самостоятельного решения

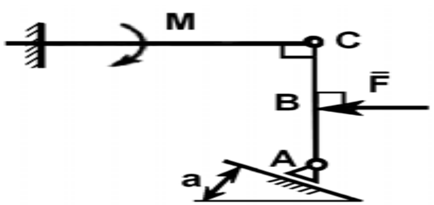
Равновесие системы тел



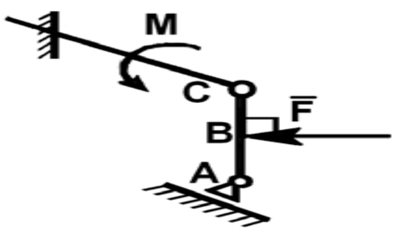
1. На балку AB действует пара сил с моментом M = 800 Н·м. Определить момент в заделке C, если AB = 2 м и BC = 0,5 м. (200)



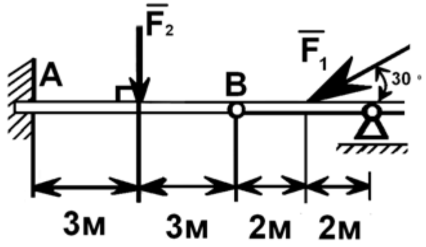
2. На балку AB действует линейно распределенная нагрузка интенсивностью q_{max}= 3 кН/м. Определить реакцию опоры B в кН, если расстояние AB = 2 м. (1)



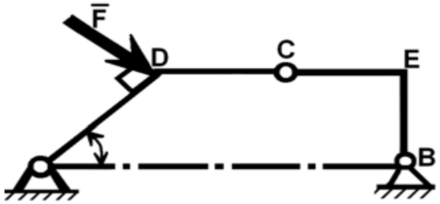
3. Определить реакцию опоры A в кН, если сила F = 3 кН, угол α = 30°, размеры AB = BC. (3)



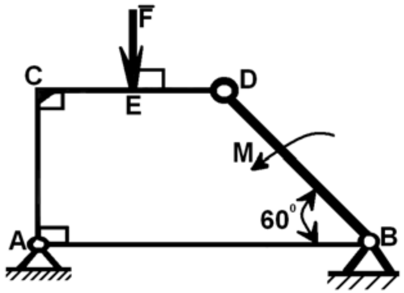
4. Найти горизонтальную составляющую реакции в шарнире C, если сила F = 800 Н, а размеры AB = BC. (400)



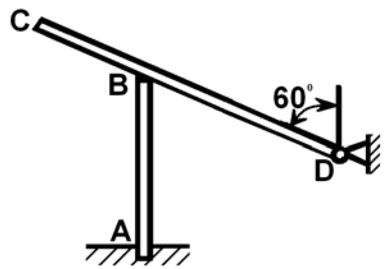
5. Два стержня соединены в шарнире B. Определить момент в заделке A, если силы F_1 = 60 Н, F_2 = 50 Н. (240)



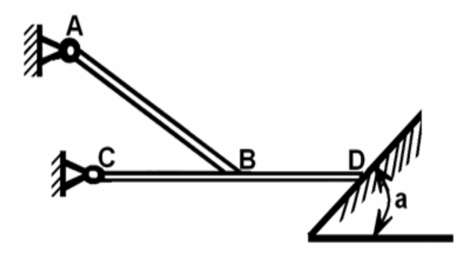
6. Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире B, если сила F = 850 Н, а размеры DC = CE = BE. (401)



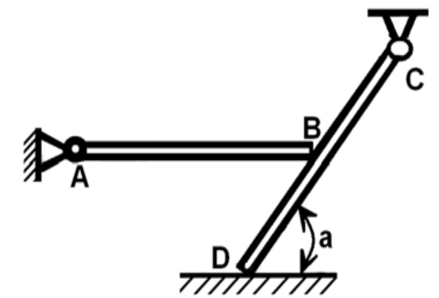
7. Определить в кН силу F, при которой вертикальная составляющая реакции в шарнире A равна 9 кН, если размеры AB = BD = 1 м, CE = DE, момент пары сил M = 6 кН·м. (4)



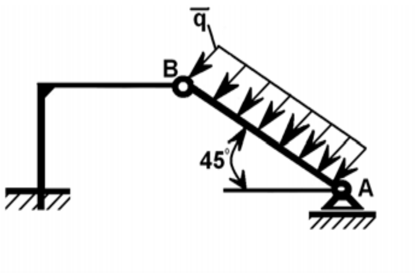
8. Однородный стержень CD весом 346 Н опирается на вертикальную стойку AB. Определить момент в заделке A, если размеры BD = 2 м, BC = 1 м, AB = 2 м. (72,2)



9. Однородная балка *AB*, вес которой 200 Н, свободно опирается в точке *B* на горизонтальную балку *CD*. Определить, с какой силой балка *CD* действует на опорную плоскость в точке *D*, если расстояние *CB* = *BD*, угол α = 60°. Весом балки *CD* пренебречь. (100)



10. Однородная горизонтальная балка *AB*, вес которой 3 кН, в точке *B* свободно опирается на балку *CD*. Определить в кН силу воздействия балки *CD* на основание в точке *D*, если расстояние *BD* = *BC*, угол α = 60°. Весом балки *CD* пренебречь. (3)



11. Стержень *AB*, длина которого 2 м, нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью *q* = 100 Н/м. Определить реакцию опоры *A*. (141)

2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОНТРОЛЯ

Задание 1
Равновесие плоской балки

Дано:

P = 10 кН; *G* = 8 кН; *q* = 1,2 кН/м; *M* = 12 кН·м; *a* = 2 м; *b* = 3 м; α = 30°; β = 60°.

Примечание:

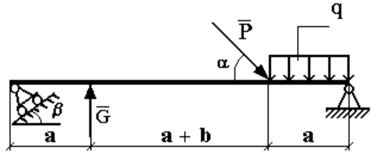
$\overline{P}, \overline{G}$ – сосредоточенные силы;

M – момент пары сил;

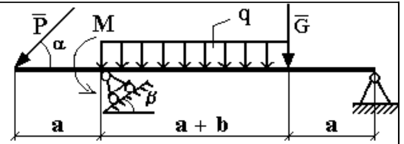
q – интенсивность нагрузки, распределенной вдоль отрезка.

Определить реакции опор горизонтальной балки от заданной нагрузки. Схемы балок показаны на рисунках 1–30.

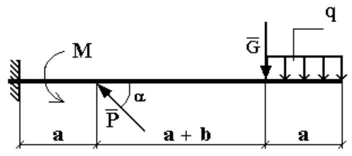
Задание 1, рисунки 1–30



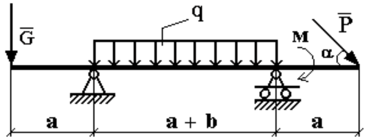
1



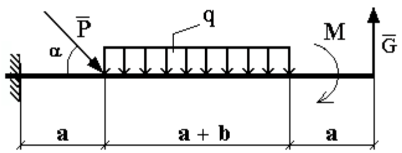
2



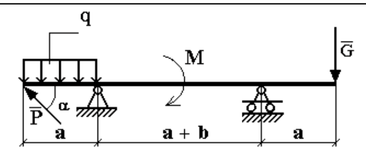
3



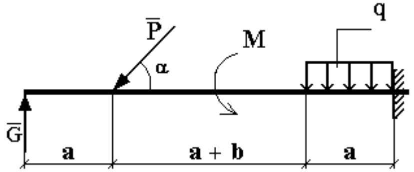
4



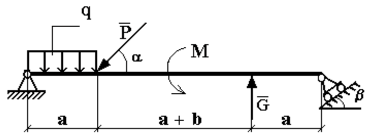
5



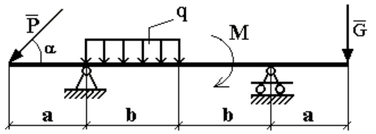
6



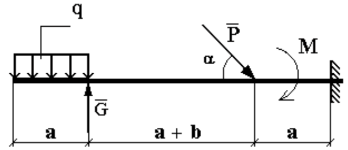
7



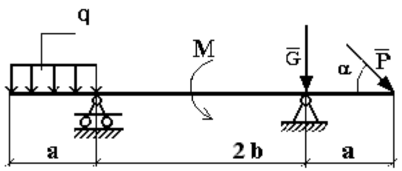
8



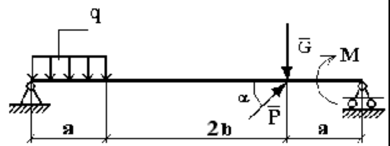
9



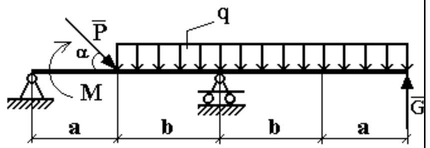
10



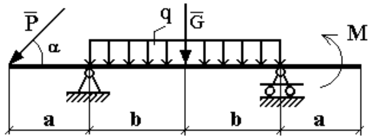
11



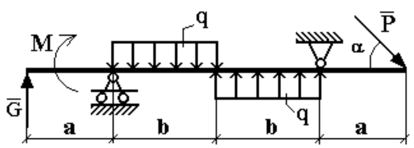
12



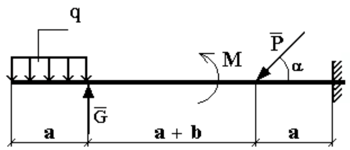
13



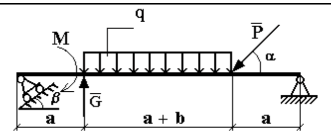
14



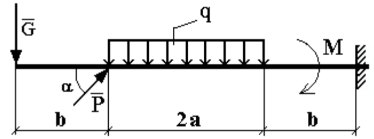
15



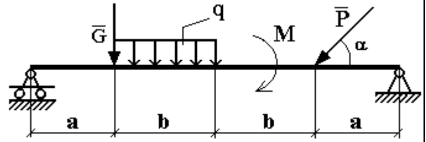
16



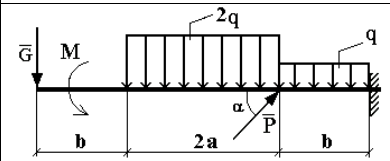
17



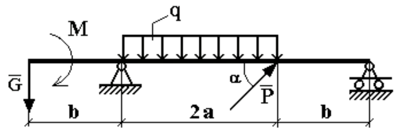
18



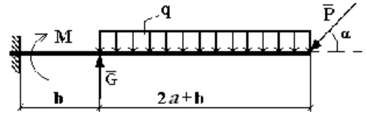
19



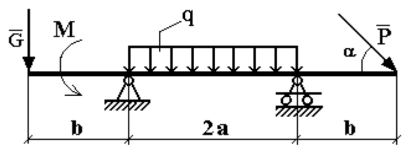
20



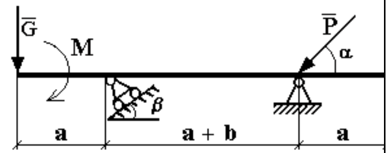
21



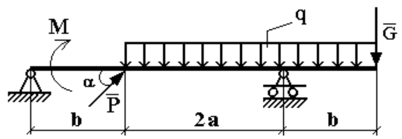
22



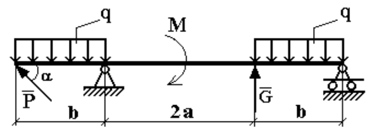
23



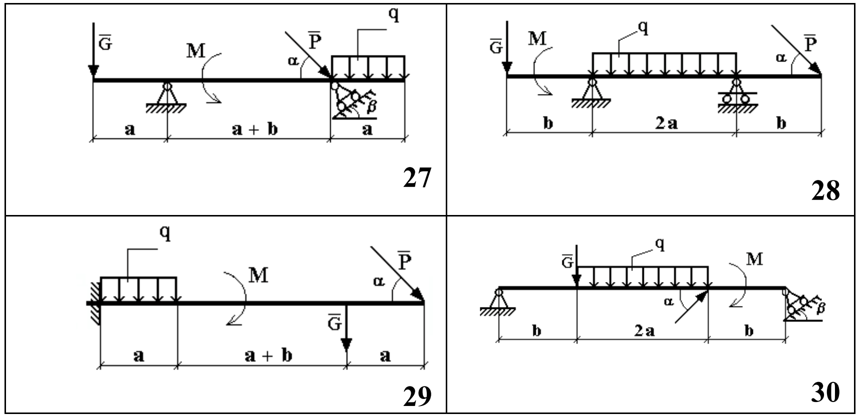
24



25



26



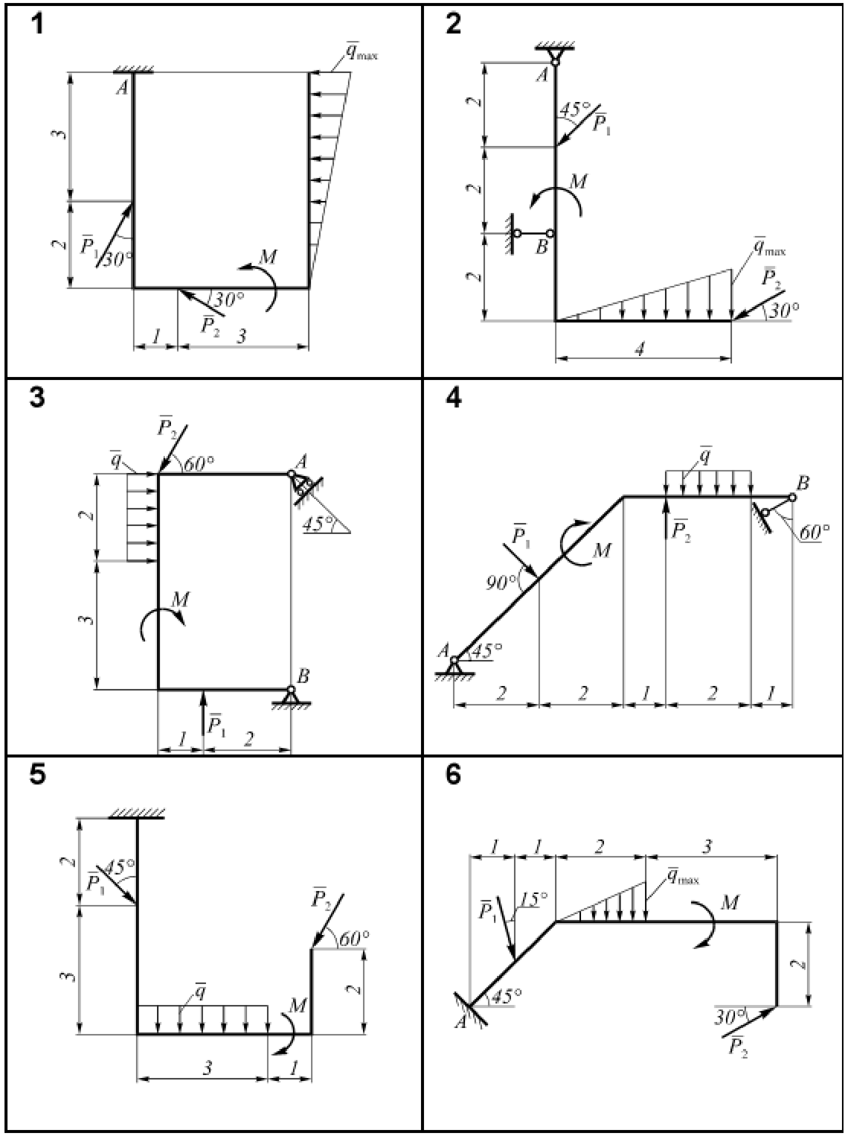
Рисунки 1–30

Задание 2
Равновесие плоской рамы

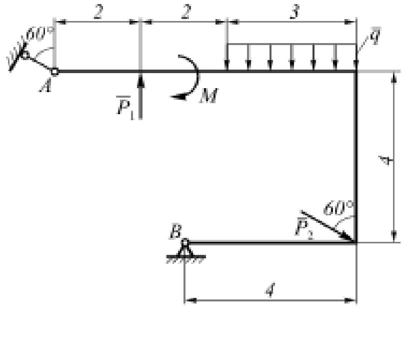
Для рам, схемы которых приведены на рисунках 1–30, рассчитать реакции связей. Выполнить проверку правильности решения. Исходные данные взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Исходные данные к заданию 2

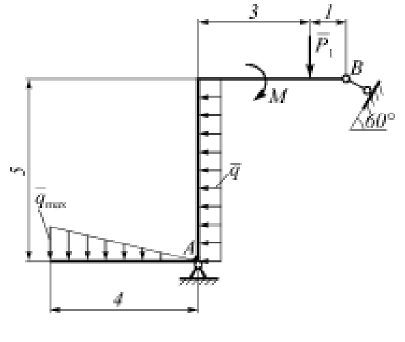
Номер варианта	P_1, Н	P_2, Н	M, Нм	q, Н/м	q_{max}, Н/м	Номер варианта	P_1, Н	P_2, Н	M, Нм	q, Н/м	q_{max}, Н/м
1	12	10	20	–	3	16	10	8	9	–	4
2	14	7	6	–	5	17	8	6	10	4	–
3	10	20	10	4	–	18	12	9	5	2	4
4	10	8	12	5	–	19	15	7	6	–	3
5	20	12	5	6	–	20	10	5	8	2	–
6	15	7	10	–	4	21	8	12	15	–	6
7	10	8	9	6	–	22	10	10	7	–	4
8	16	–	10	2	3	23	16	–	6	5	6
9	10	15	8	5	–	24	9	11	8	6	–
10	6	–	6	4	5	25	10	8	5	1	–
11	5	10	8	–	4	26	12	10	6	2	–
12	7	5	10	5	–	27	7	14	9	–	4
13	6	–	12	3	3	28	8	6	5	–	2
14	12	–	9	3	2	29	9	12	7	–	5
15	14	–	6	4	2	30	12	5	10	–	5



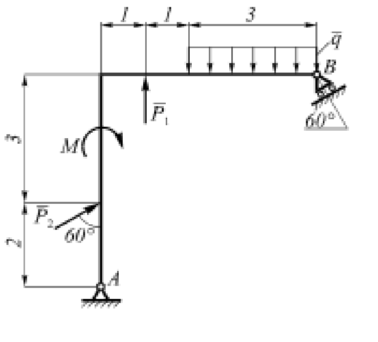
7



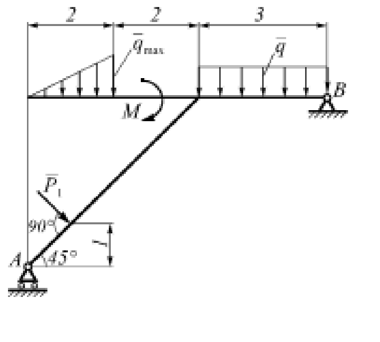
8



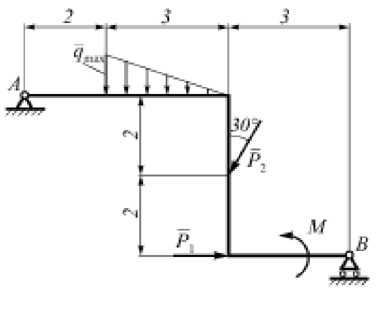
9



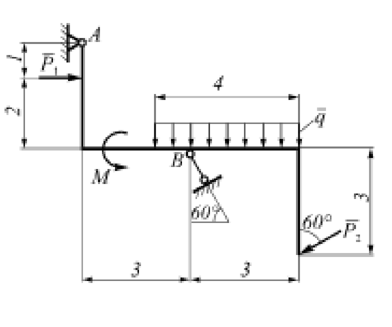
10



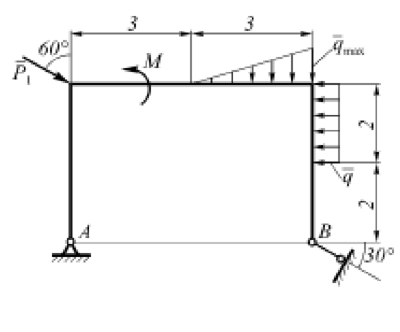
11



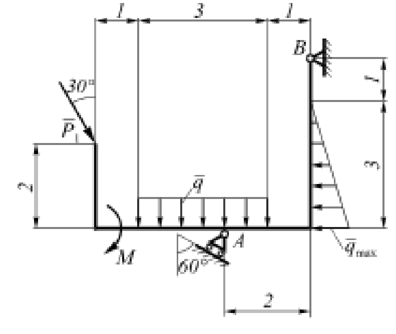
12



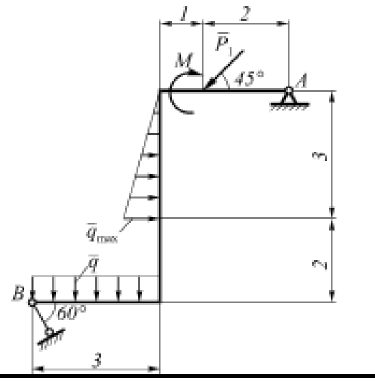
13



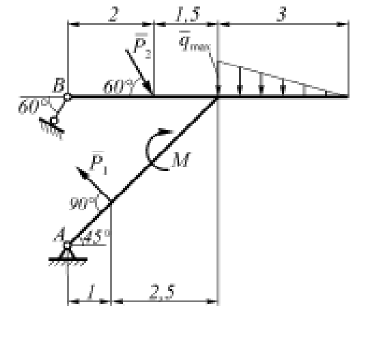
14



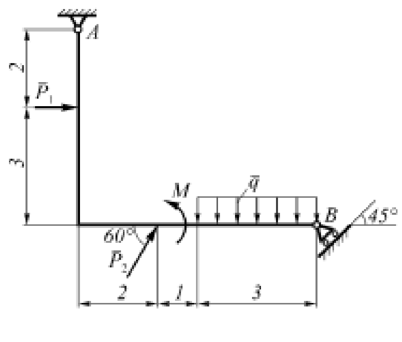
15



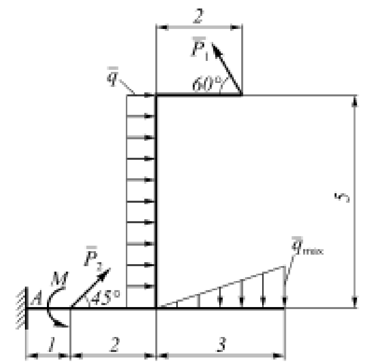
16



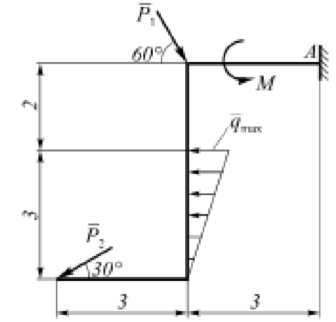
17



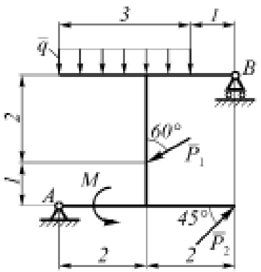
18



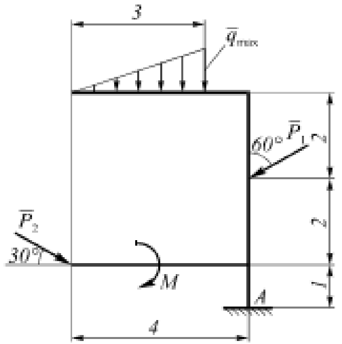
19



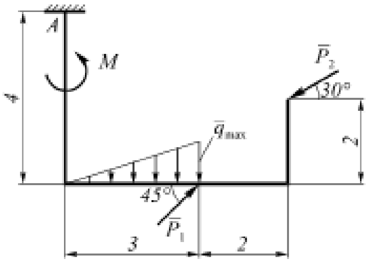
20



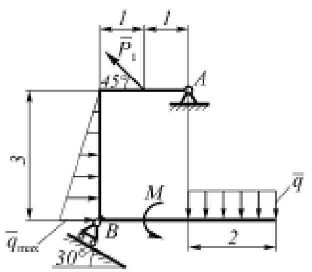
21



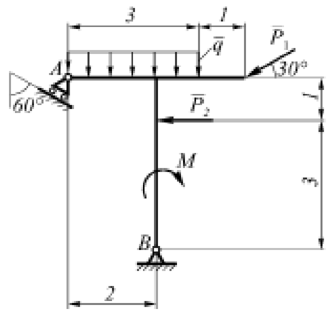
22



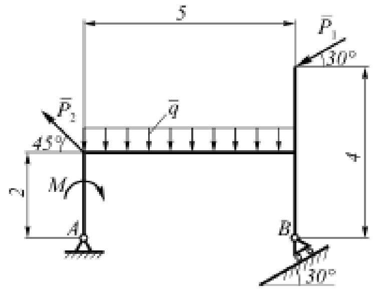
23



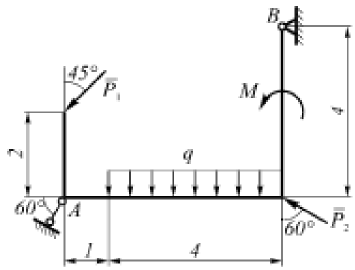
24



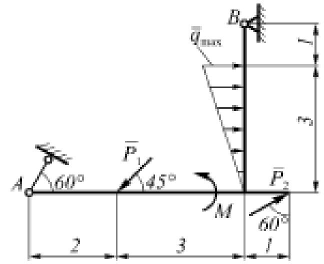
25



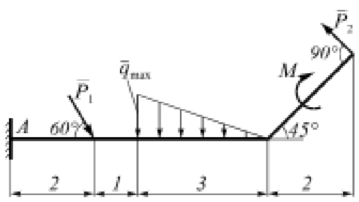
26



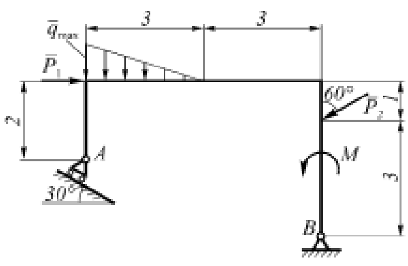
27



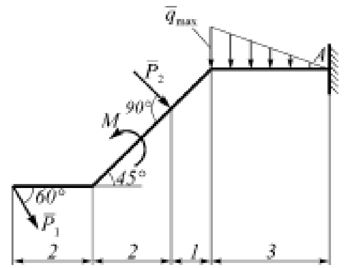
28



29



30



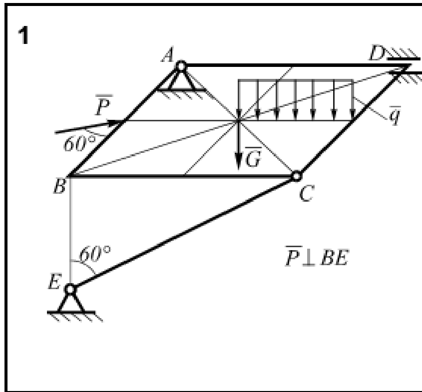
Рисунки 1–30

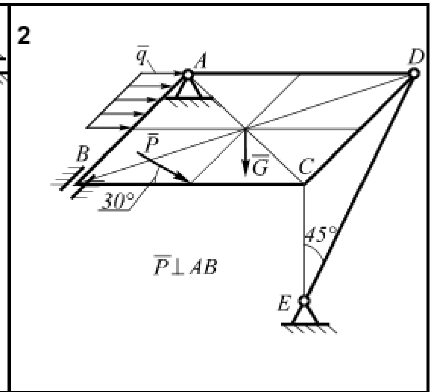
Задание 3
Равновесие тела
под действием произвольной пространственной системы сил

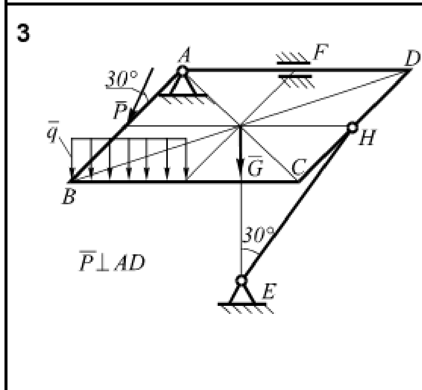
Однородные плиты, изображенные на рисунках 1–30, находятся в равновесии под действием силы тяжести G, силы P и равномерно распределенной нагрузки интенсивности q, значения которых приведены в таблице 3. Размеры плиты $AB = 1$ м; $BC = 2$ м. Определить реакции связей. В вариантах 25–30: $\alpha = 60°$ и $CE = BC$.

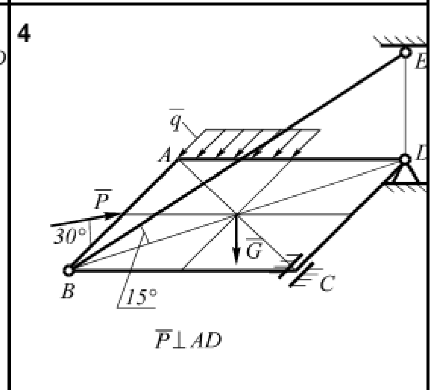
Таблица 3 – Исходные данные к задаче 3

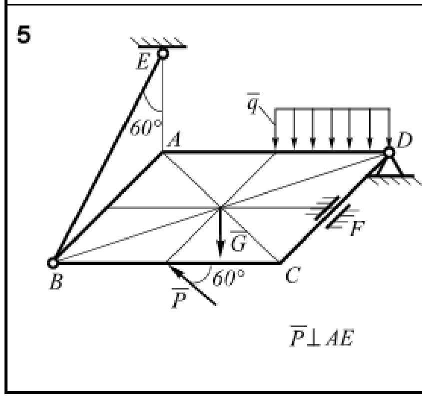
номер варианта	P, кН	G, кН	q, кН/м	номер варианта	P, кН	G, кН	q, кН/м	номер варианта	P, кН	G, кН	q, кН/м
1	7	10	8	11	12	6	6	21	6	8	5
2	9	12	10	12	8	10	5	22	7	11	12
3	5	8	4	13	7	19	3	23	10	7	4
4	4	14	6	14	13	5	7	24	12	16	10
5	10	5	5	15	10	16	8	25	8	20	5
6	12	15	7	16	12	11	10	26	15	17	6
7	6	11	8	17	15	15	10	27	12	13	4
8	11	9	5	18	11	11	6	28	10	18	8
9	5	7	9	19	9	10	8	29	9	9	12
10	8	12	10	20	10	18	9	30	14	6	8

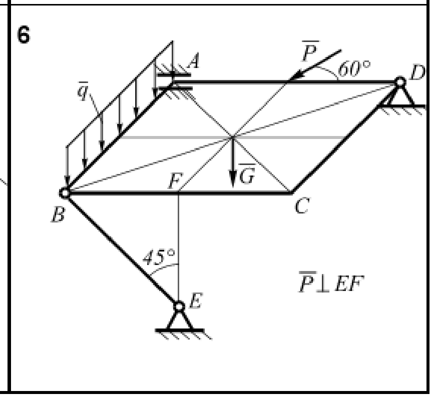




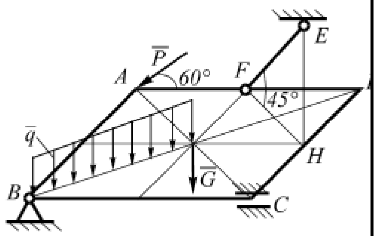






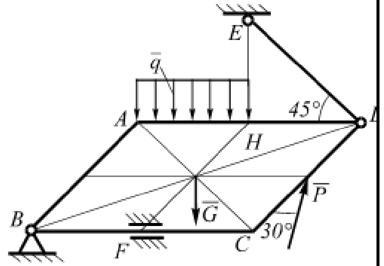


7



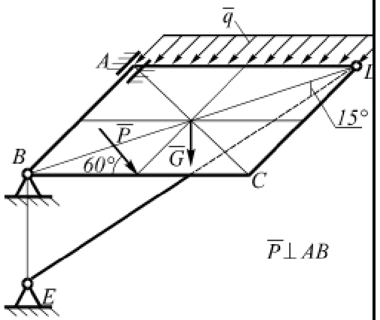
$\overline{P} \perp EH$

8



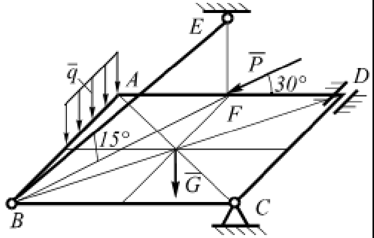
$\overline{P} \perp EH$

9



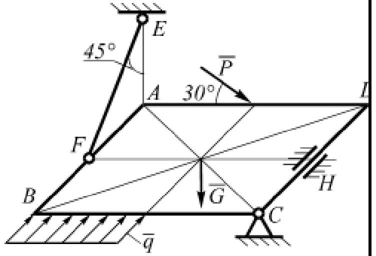
$\overline{P} \perp AB$

10



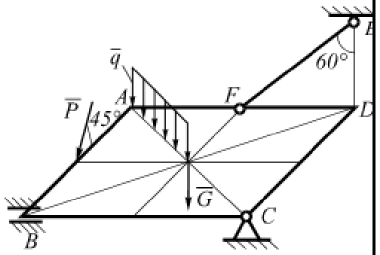
$\overline{P} \perp EF$

11



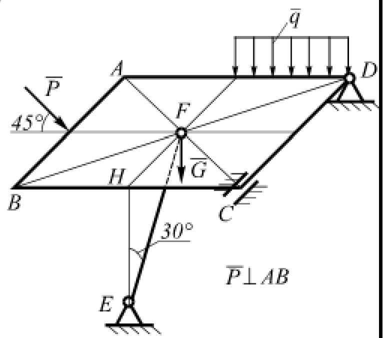
$\overline{P} \perp AB$

12



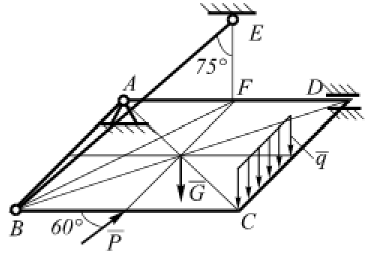
$\overline{P} \perp DE$

13



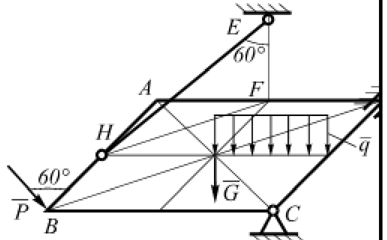
$\overline{P} \perp AB$

14



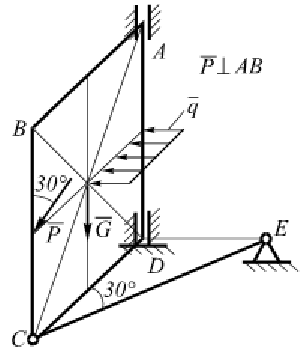
$\overline{P} \perp EF$

15



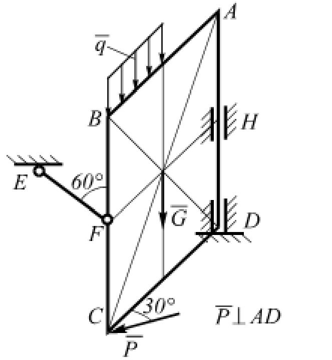
$\overline{P} \perp EF$

16



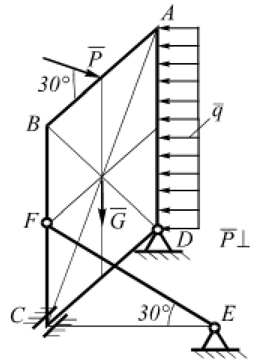
$\overline{P} \perp AB$

17



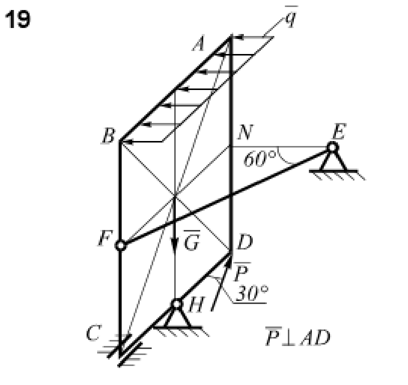
$\overline{P} \perp AD$

18

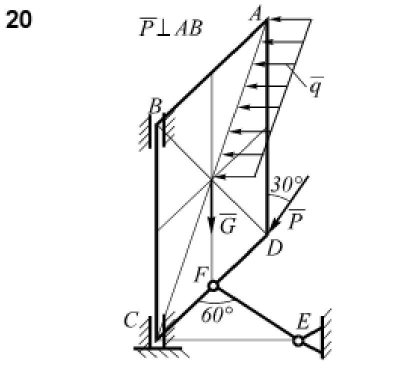


$\overline{P} \perp CE$

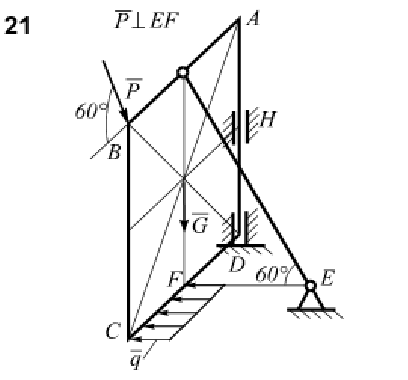
19



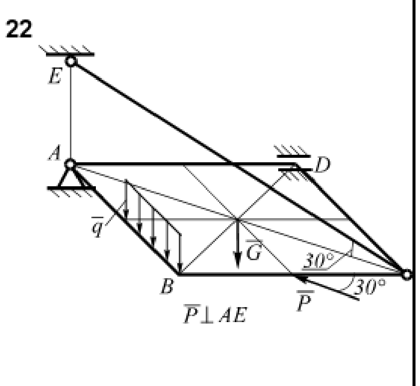
20



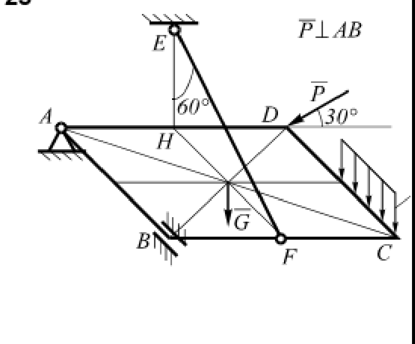
21



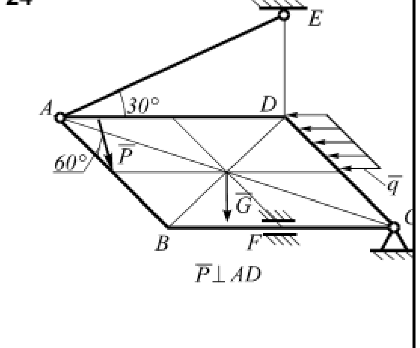
22



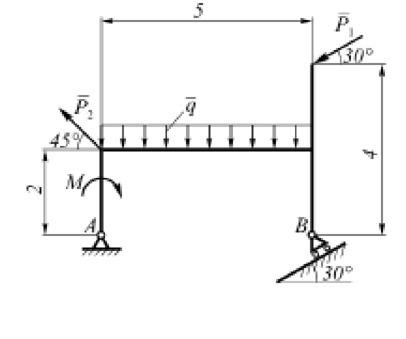
23



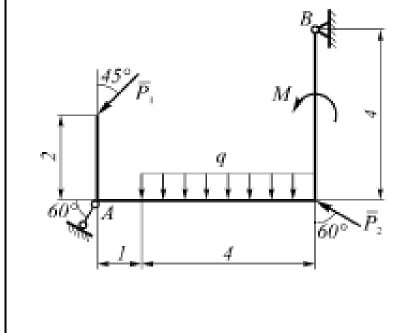
24



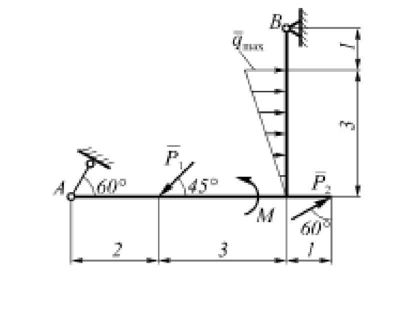
25



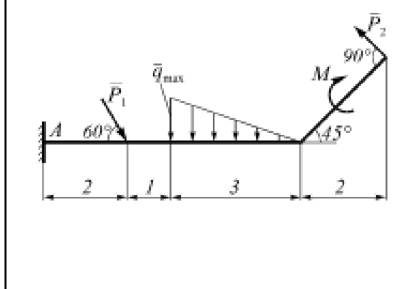
26



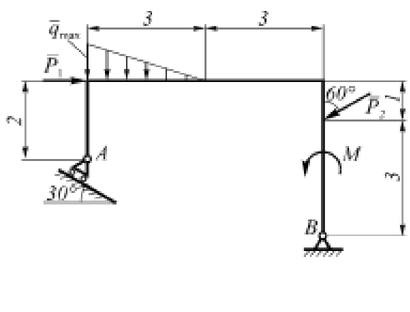
27



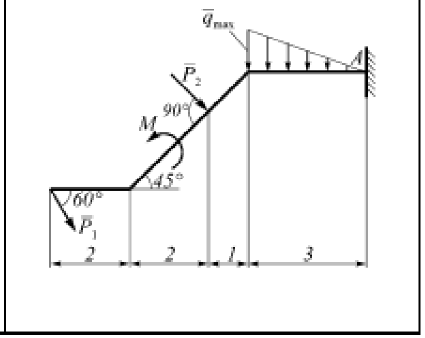
28



29



30



Рисунки 1–30

3. УПРАВЛЯЕМАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Контрольные задания

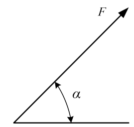
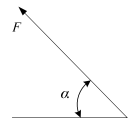
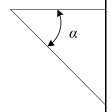
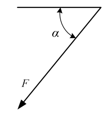
Задача С1

Жесткая рама (рисунки С1.0–С1.9) закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках. В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 25 кН. На раму действует пара сил с моментом M = 60 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице 1 (например, в условиях № 1 на раму действуют сила F_2 под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила F_3 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E).

Определить реакции связей в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах считать a = 0,5 м.

Указания. Данная задача – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении следует учесть, что натяжение обоих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы F удобно разложить ее на составляющие F' и F'', для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона. Тогда $m_0\left(\overline{F}\right)=m_0\left(\overline{F'}\right)+m_0\left(\overline{F''}\right)$.

Таблица 1

Силы								
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН	
Номер условия	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град	Точка приложения	α, град
0	H	30	-	-	-	-	K	60
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	K	75	-	-	-	-	E	30
3	-	-	K	60	H	30	-	-
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

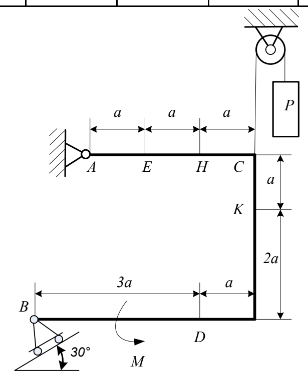


Рисунок С1.0

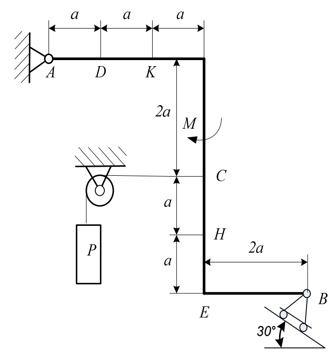


Рисунок С1.1

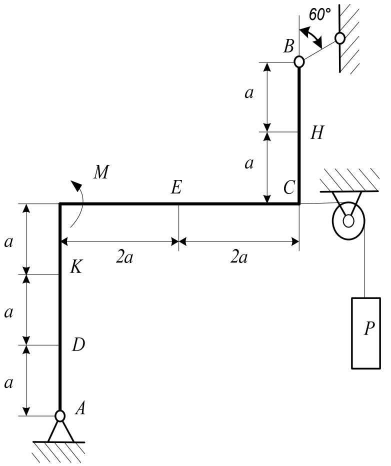


Рисунок С1.2

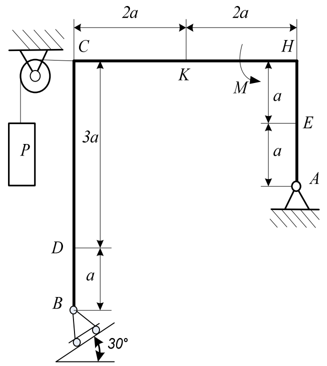


Рисунок С1.3

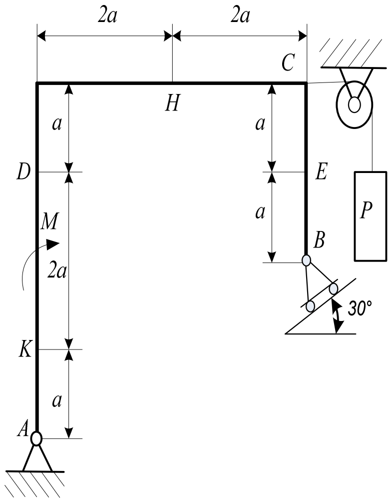


Рисунок С1.4

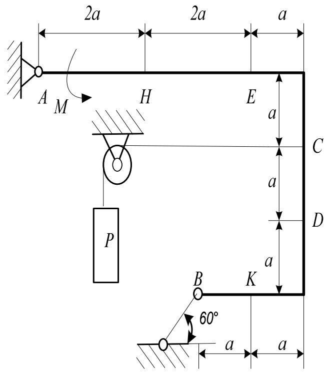


Рисунок С1.5

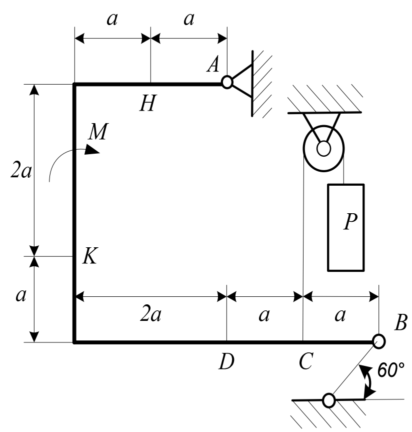


Рисунок С1.6

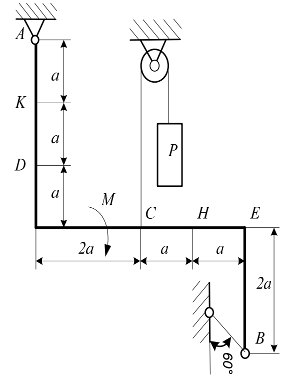


Рисунок С1.7

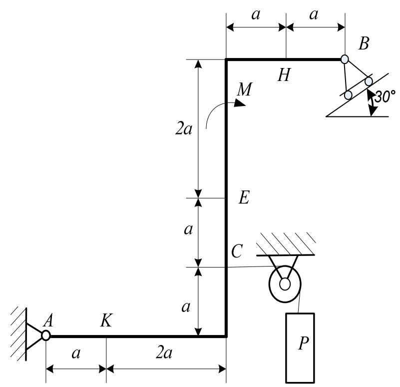


Рисунок С1.8

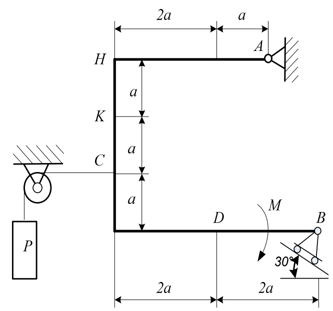


Рисунок С1.9

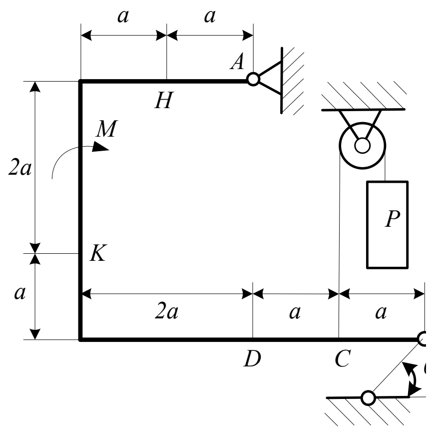


Рисунок С1.6

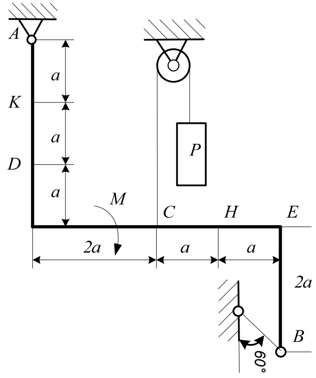


Рисунок С1.7

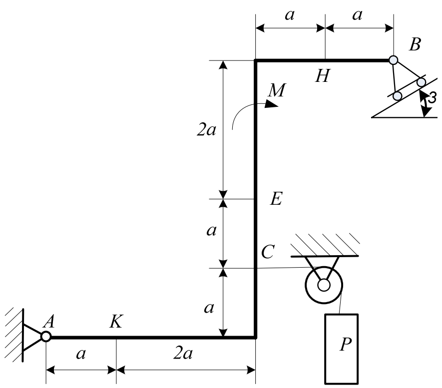


Рисунок С1.8

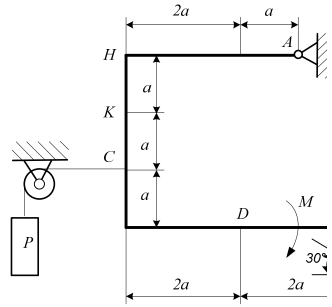


Рисунок С1.9

Пример С1. Жесткая пластина *ABCD* (рисунок 31) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры указаны на рисунке 31.

Дано: F = 25 кН, P = 18 кН, M = 50 кН·м, α = 60°, β = 30°и γ = 75°, a = 0,5 м.

Определить реакции в точках *A* и *B*, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy и изобразим все действующие на пластину силы: силу F, пару сил с моментом M, натяжение троса T (по модулю $T = P$) и реакции связей X_A, X_B и R_B (реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* изображаем двумя составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. Так как уравнения равновесия содержат три неизвестные величины, то задача статически определенная.

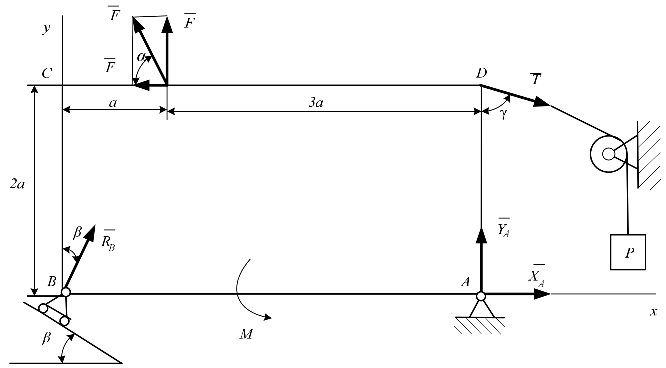


Рисунок 31. Схема к примеру С.1

Составим три уравнения равновесия плоской системы. При вычислении момента силы A относительно точки *A* воспользуемся теоремой Вариньона, то есть разложим силу F на составляющие F' и F'' ($F' = F \cdot \cos\alpha$, $F'' = F \cdot \sin\alpha$) и учтем, что $m_A\left(\overline{F}\right) = m_A\left(\overline{F'}\right) + m_A\left(\overline{F''}\right)$.

Запишем уравнение равновесия в проекции на ось X:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \qquad X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0; \qquad (1.1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \qquad Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0. \qquad (1.2)$$

Зная, что при направлении против часовой стрелки момент силы имеет знак «плюс», а по часовой – «минус», запишем уравнение равенства моментов относительно точки *A*:

$$\sum m_A(F_k) = 0,$$

$$M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0. \qquad (1.3)$$

Выразим из полученных уравнений неизвестные реакции:

$$R_2 = \frac{M + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a}{\cos\beta\cdot 4a};$$

$$X_A = -R_B\sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma;$$

$$Y_A = +R_B\cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma.$$

Подставляем числовые значения, определим искомые реакции:

$$R = \frac{50 + 25\cos 60^\circ\cdot 2\cdot 0.5 - 25\sin 60^\circ\cdot 3\cdot 0.5 - 18\sin 75^\circ\cdot 2\cdot 0.5}{\cos 30^\circ\cdot 4\cdot 0.5};$$

$$X_A = -7{,}3\sin 30^\circ + 25\cos 60^\circ - 18\sin 75^\circ = -8{,}5 \text{ кН};$$

$$Y_A = -7{,}3\cos 30^\circ - 25\sin 60^\circ + 18\sin 75^\circ = -23{,}3 \text{ кН}.$$

Ответ. X_A = 8,5 кН; Y_A = –23,3 кН; R_B = 7,3 кН. Знаки «минус» показывают, что реакции X_A и Y_A направлены противоположно показанным на рисунке 31.

Задача С2

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке *C* или соединены друг с другом шарнирно (рисунки С2.0–С2.5), или свободно опираются друг на друга (рисунок С2.6–С2.9).

Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке *A* или шарнир, или жесткая заделка; в точке *B* – или невесомый стержень *BB′* (рисунки 0 и 1), или гладкая плоскость (рисунки 2 и 3), или шарнир (рисунки 4–9); в точке *Д* – или невесомый стержень *ДД′* (рисунки 1, 2, 7), или шарнирная опора на катках (рисунок 9).

На каждую конструкцию действуют следующие силы: пара сил с моментом M = 60 кН/м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 20 кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в таблице С2; там же в столбце «Участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях №1 на конструкцию действуют сила $\overline{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке *L*, сила $\overline{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке *E,* и нагрузка, распределенная на участке *CK*).

Определить реакции связей в точках *A, B, C*, (для рисунков 1, 2, 7, 9 еще и в точке *Д*), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,2 м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С2, *а*.

Указания. Задача С2 на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем – равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, значение которой тоже неизвестно.

Пример С2. На угольник *ABC (∠ ACB = 90°)*, конец *A* которого жестко заделан, в точке *C* опирается стержень *ДE* (рисунок С2, *а*). Стержень имеет в точке *Д* неподвижную шарнирную опору; к нему в точке *E* приложена сила $\overline{F}_2$, а к угольнику – равномерно распределенная на участке *KB* нагрузка интенсивности *q* и пара сил с моментом *M*.

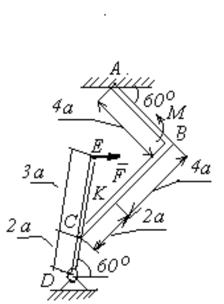


Рисунок С2, *а*

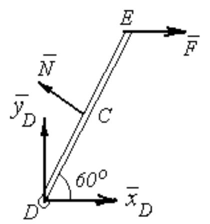


Рисунок С2, *б*

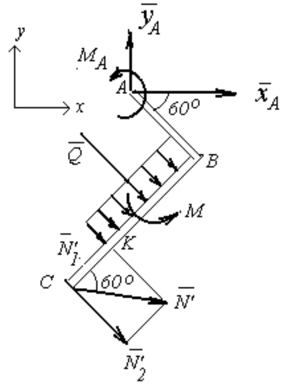


Рисунок С2, *в*

Дано: $F = 10$ кН, $M = 5$ кНм, $q = 20$ кН/м, $a = 0{,}2$ м.

Определить реакции в точках *А, С, Д,* вызванные заданными нагрузками.

Решение 1.

1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня *ДЕ* (рисунок С2, *б*). Проведем координатные оси *ох* и *оу* и изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно, и составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ реакции шарнира *Д*. Для полученной плоскости системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad X_D + F = N \sin 60^\circ = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad Y_D + N \cos 60^\circ = 0;$$

$$\Sigma m_D(\overline{F}_k) = 0, \quad N \cdot 2a - F \cdot 5a \sin 60^\circ = 0.$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рисунок С2, *в*). На него действует сила давления стержня N', направленная противоположно реакции $\overline{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка *КВ* (численно $Q = q \cdot 4a = 26$ кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, и пары сил с моментом M_A . Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0; \qquad X_A + Q\cos 60^\circ + N\sin 60^\circ = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \qquad Y_A - Q\sin 60^\circ - N\cos 60^\circ = 0;$$

$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad M_A + M + Q \cdot 2a + N\cos\cdot 60^\circ \cdot 4a + N\cos 30^\circ \cdot 6a = 0.$$

При вычислении момента силы $\overline{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин, решив систему уравнений (1), (6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N' = N$ в силу равенства действия и противодействия.

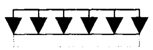
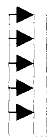
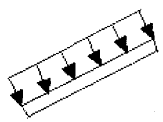
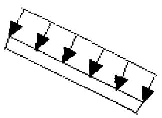
Ответ. $N = 21{,}7$ кН, $Y_D = \ 10{,}8$ кН; $X_D = 8{,}8$ кН, $X_A = 26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = \ 42{,}6$ кНм.

Знаки указывают, что реакции $\overline{Y}_D$, $\overline{X}_A$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Таблица С2

Силы	$\overline{F}_1$, α_1 F_1=10 kH		$\overline{F}_2$, α_2 F_2=20 kH		$\overline{F}_3$, α_3 F_3=30 kH		$\overline{F}_4$, α_4 F_4=40 kH		Участок
Номер условия	Точка прилож.	α_1, град.	Точка прилож.	α_2, град.	Точка прилож.	α_3, град.	Точка прилож.	α_4, град.	
0	K	60	–	–	H	30	–	–	CL
1	–	–	L	60	–	–	E	30	CK
2	L	15	–	–	K	60	–	–	AE
3	–	–	K	30	–	–	H	60	CL
4	L	30	–	–	E	60	–	–	CK
5	–	–	L	75	–	–	K	30	AE
6	E	60	–	–	K	75	–	–	CL
7	–	–	H	60	L	30	–	–	CK
8	–	–	K	30	–	–	E	15	CL
9	H	30	–	–	–	–	L	60	CK

Таблица С2, *а*

Участок на угольнике		***Участок на стержне***	
Горизонтальный	Вертикальный	Рис. 1, 2, 4, 7, 9	Рис. 0, 3, 5, 6, 8
			

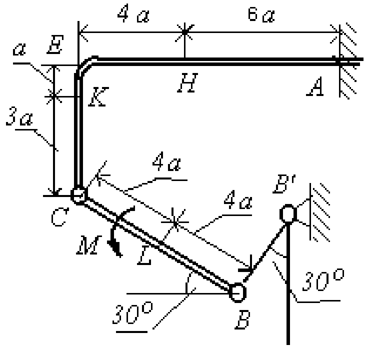


Рисунок С2.0

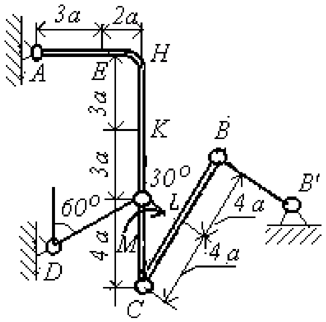


Рисунок С2.1

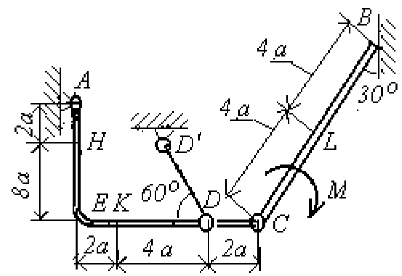


Рисунок С2.2

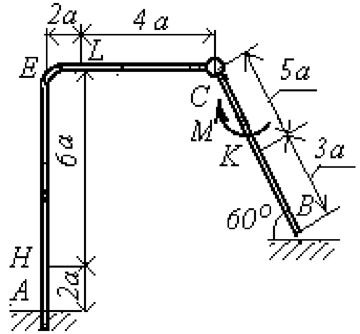


Рисунок С2.3

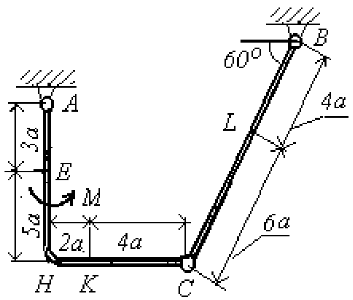


Рисунок С2.4

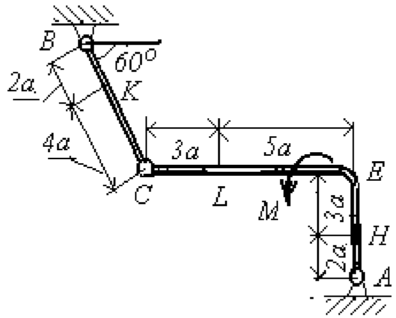


Рисунок С2.5

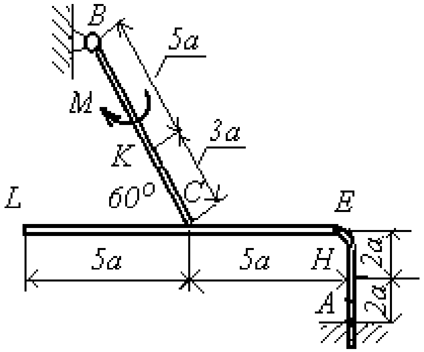


Рисунок С2.6

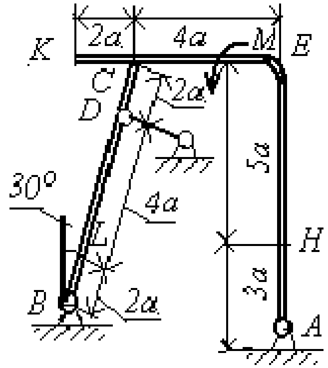


Рисунок С2.7

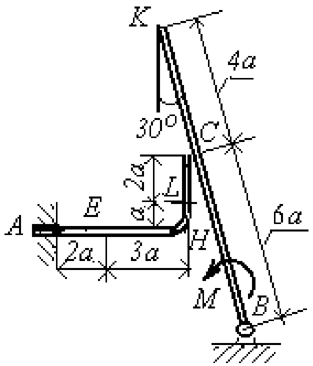


Рисунок С2.8

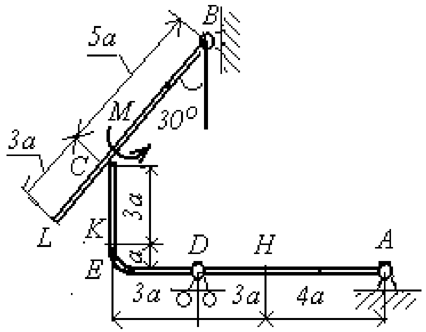


Рисунок С2.9

Задача С3

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом, в двух узлах прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам *A*, *B*, *C*, *D* (рисунки С3.0–С3.9, таблица С3). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах *H*, *K*, *L* или *M* прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблицы. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила P = 200 Н; во втором узле приложена сила Q = 100 Н. Сила $\overline{P}$ образует с положительными направлениями

координатных осей *x, y, z* углы, равные соответственно $\alpha_1 = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma_1 = 45°$, а сила $\overline{Q}$ – углы $\alpha_2 = 60°$, $\beta_2 = 60°$, $\gamma_2 = 75°$; направления осей *x, y, z* для всех рисунков показаны на рисунке С3.0.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости *xy*, – квадраты. Диагонали других (боковых) граней образуют с плоскостью *xy* угол $\varphi = 60°$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51°$. Определить усилия в стержнях.

На рисунке С3.10 в качестве примера показано, как должен выглядеть чертеж С3.3, если по условиям задачи узлы находятся в точках *L* и *M*, а стержнями являются *LM*, *LA*, *LB*; *MA*, *MC*, *MD*. Там же показаны углы φ и θ.

Указания. Задача С3 – на равновесие пространственной системы сходящихся сил. При ее решении следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов, где сходятся стержни и приложены заданные силы, и учесть закон о равенстве действия и противодействия; начинать необходимо с узла, где сходятся три стержня.

Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня (например, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и т.д.).

Таблица С3

Номер условия	0	1	2	3	4
Узлы	*H, M*	*L, M*	*K, M*	*L, H*	*K, H*
Стержни	*HM, HA, HB, MA, MC, MD*	*LM, LA, LD, MA, MB,MC*	*KM, KA, KB, MA, MC, MD*	*LH, LC, LD, HA, HB, HC*	*KH, KB, KC, HA, HC, HD*

Номер условия	5	6	7	8	9
Узлы	*M, H*	*L, H*	*K, H*	*L, M*	*K, M*
Стержни	*MH, MB, MC, HA, HC, HD*	*LH, LB, LD, HA, HB, HC*	*KH, KC, KD, HA, HB, HC*	*LM, LB, LD, MA, MB, MC*	*KM, KA, KD, MA, MB, MC*

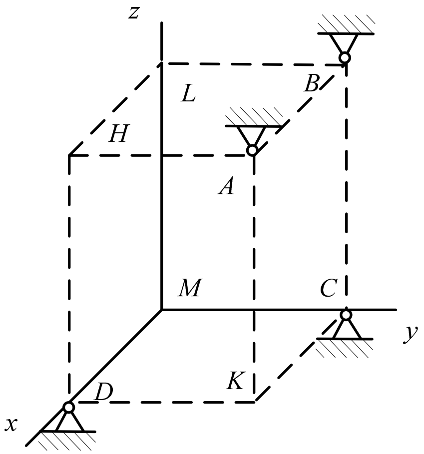


Рисунок С3.0

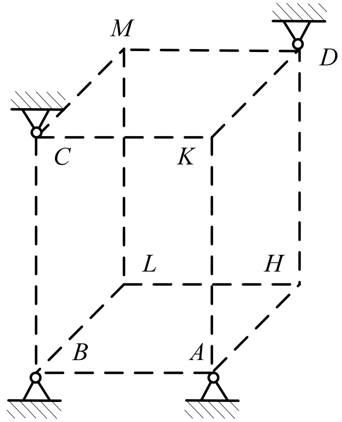


Рисунок С3.1

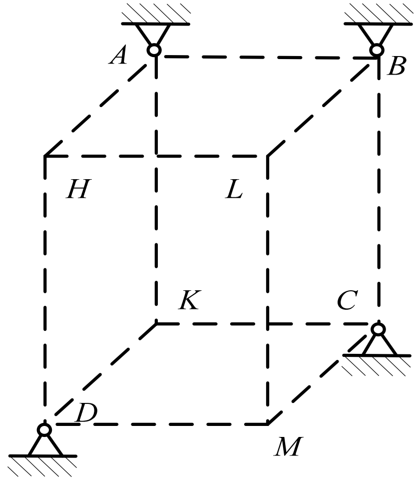


Рисунок С3.2

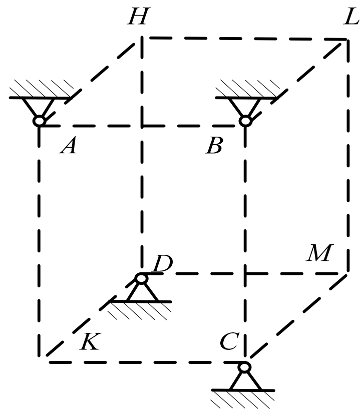


Рисунок С3.3

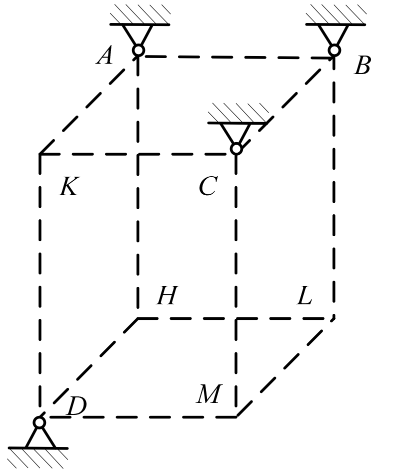


Рисунок С3.4

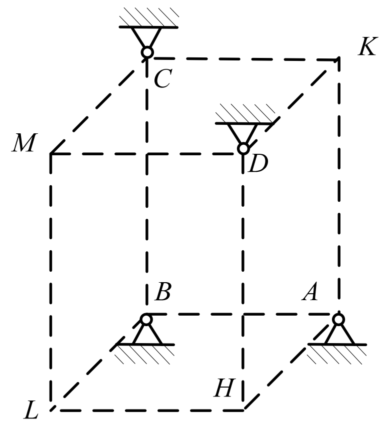


Рисунок С3.5

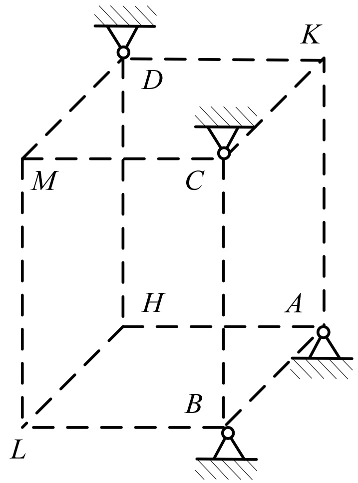


Рисунок С3.6

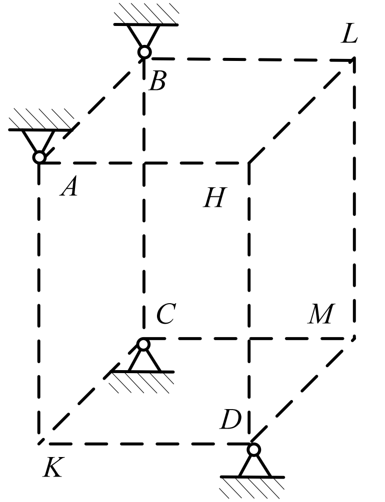


Рисунок С3.7

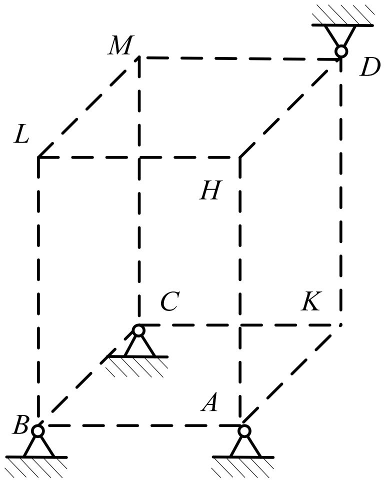


Рисунок С3.8

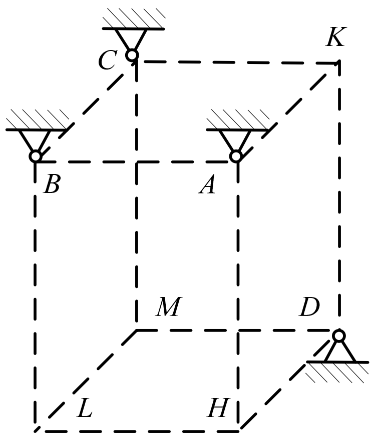


Рисунок С3.9

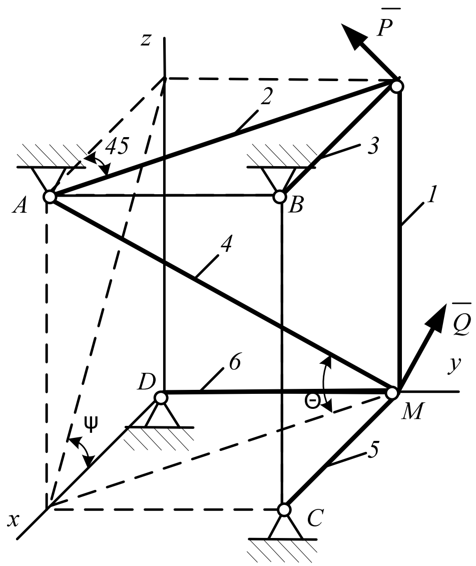


Рисунок С3.10

Пример С3. Конструкция состоит из невесомых стержней *1*, *2*,…, *6*, соединенных друг с другом (в узлах *K* и *M*) и с неподвижными опорами *A*, *B*, *C*, *D* шарнирами (рисунок С3). В узлах *K* и *M* приложены силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, образующие с координатными осями углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 соответственно (на рисунке показаны только углы α_1, β_1, γ_1).

Дано: P = 100 Н, $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 60°$, $\gamma_1 = 45°$; Q = 50 Н, $\alpha_2 = 60°$, $\beta_2 = 60°$, $\gamma_2 = 60°$; $\psi = 30°$, $\varphi = 60°$, $\delta = 74°$/

Определить усилия в стержнях 1–6.

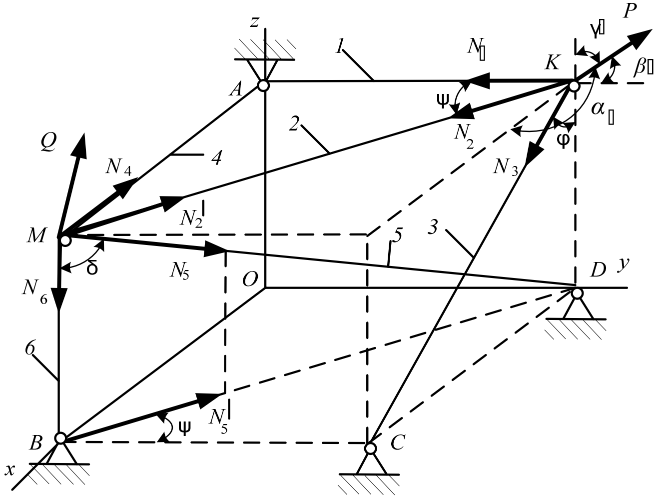


Рисунок 32. Схема к примеру С3

Решение. 1. Рассмотрим равновесие узла *K*, в котором сходятся стержни *1*, *2*, *3*. На узел действуют сила $\overline{P}$ и реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$ стержней, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми. Составим уравнения равновесия этой пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kx}=0,\ P\cos\alpha_1+N_2\sin\psi+N_3\sin\varphi=0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky}=0,\ P\cos\beta_1-N_1-N_2\cos\psi=0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{kz}=0,\ P\cos\gamma_1-N_3\cos\varphi=0. \qquad (3)$$

Решив уравнения (1), (2), (3) при заданных числовых значениях силы *P* и углов, получим: N_1 = 349 Н, N_2 = –345 Н, N_3 = 141 Н.

2. Рассмотрим равновесие узла *M*. На узел действуют сила $\overline{Q}$ и реакции $\overline{N}'_2$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, $\overline{N}_6$ стержней. При этом по закону о равенстве действия и противодействия реакция $\overline{N}'_2$ направлена противоположно N_2, численно же $\overline{N}'_2=N_2$. Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx}=0,\ Q\cos\alpha_2-N_2\sin\psi-N_4-N_5\sin\delta\sin\psi=0; \qquad (4)$$

$$\sum F_{ky}=0,\ Q\cos\beta_2+N_2\cos\psi+N_5\sin\delta\cos\psi=0; \qquad (5)$$

$$\sum F_{kz}=0,\ Q\cos\gamma_2-N_5\cos\delta-N_6=0. \qquad (6)$$

При определении проекций силы $\overline{N}_5$ оси *x* и *y* в уравнениях (4) и (5) удобнее найти проекцию $\overline{N}_5$ этой силы на плоскость *xOy* (по величине $\overline{N}'_5=\overline{N}_5\sin\delta$), а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на оси.

Решив систему уравнений (4), (5), (6) и учитывая, что $\overline{N}'_2=N_2=-345$ Н, найдем, чему равны $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, $\overline{N}_6$.

Ответ. N_1 = 349 Н; N_2 = –345 Н; N_3 = 141 Н; N_4 = 50 Н; N_5 = 329 Н; N_6 = 66 Н. Знаки показывают, что стержни *2* и *6* сжаты; остальные – растянуты

Задача С4

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке *A*, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке *B* и невесомым стержнем *1* (рисунки С4.0–С4.7) или двумя подшипниками в точках *A* и *B*, и двумя невесомыми стержнями *1* и *2* (рисунок С4.8, С4.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

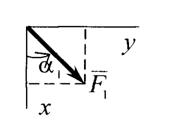
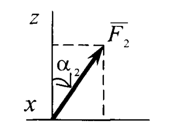
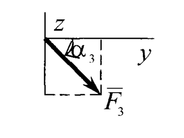
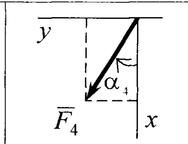
Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты P_1 = 5 кН, вес меньшей плиты P_2 = 3 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость *xy* горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом *M* = 4 кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в таблице С4; при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости *xy*, сила $\overline{F}_2$ – в плоскости, параллельной *xz*, и сила $\overline{F}_3$ в плоскости, параллельной *yz*. Точки приложения сил (*D*, *E*, *H*, *K*) находятся в углах или в середине сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a = 0{,}6$ м.

Указания. Задача С4 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда по теореме Вариньона: $m_x(F) = m_x(F') + m_x(F'')$ и т.д.

Таблица С4

Силы								
	$F_2 = 8$ кН		$F_2 = 8$ кН		$F_3 = 10$ кН		$F_4 = 12$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	E	60	H	30	–	–	–	–
1	–	–	D	60	E	30	–	–
2	–	–	–	–	K	60	E	30
3	K	30	–	–	D	0	–	–
4	–	–	E	30	–	–	D	60
5	H	0	K	60	–	–	–	–
6	–	–	H	90	D	30	–	–
7	–	–	–	–	H	60	K	90
8	D	30	–	–	K	0	–	–
9	–	–	D	90	–	–	H	30

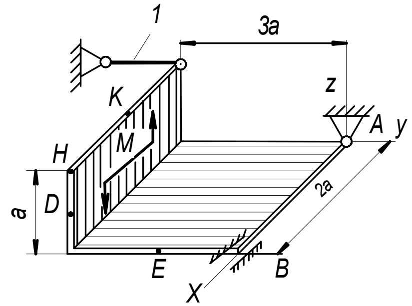
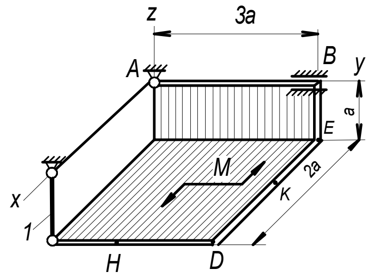


Рисунок С4.0



РисунокС4.3

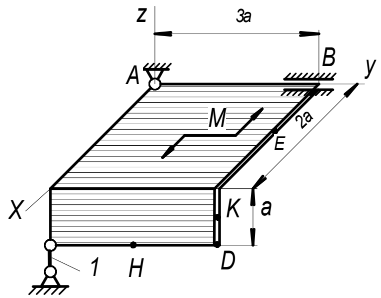


Рисунок С4.2

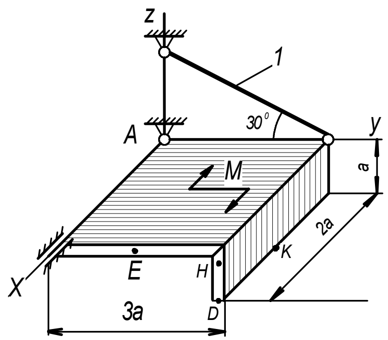


Рисунок С4.4

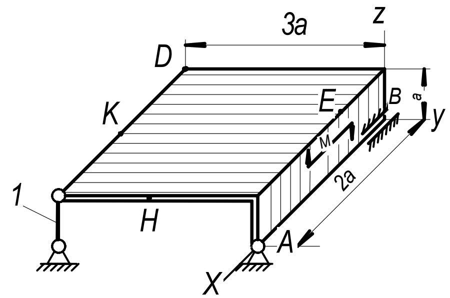


Рисунок С4.1

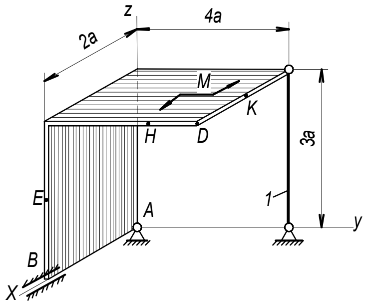


Рисунок С4.6

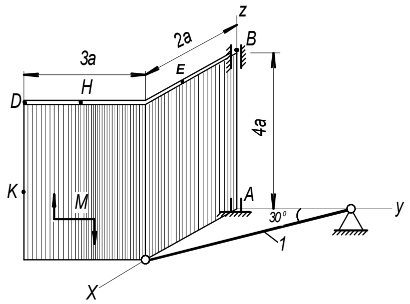


Рисунок С4.7

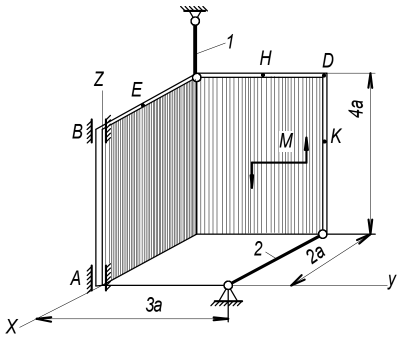


Рисунок С4.8

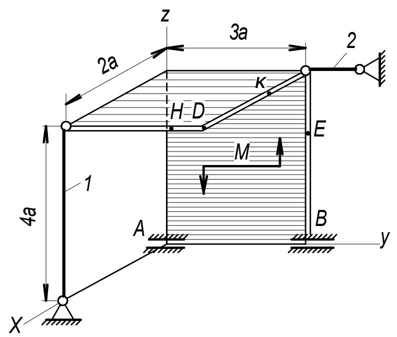


Рисунок С4.9

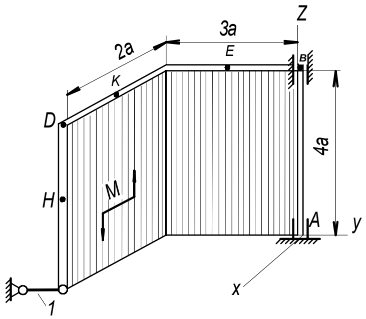


Рисунок С4.5

Пример С4. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рисунок С4) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим подшипником в точке B и невесомым стержнем DD'.

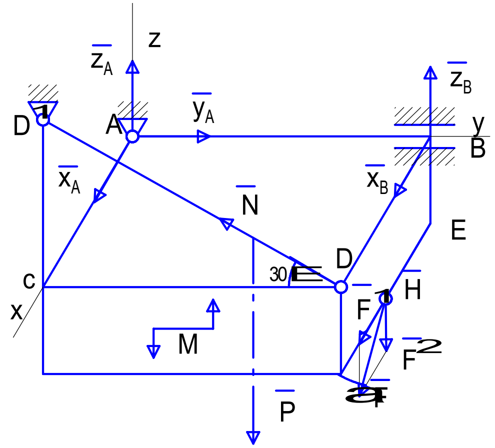


Рис. С - 4

На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила F, а в плоскости, параллельной yz, – пара сил с моментом M.

Дано: $P = 3$ кН, $F = 8$ кН, М = 4 кН·м, $\alpha = 60°$, АС = 0,8 м, $BE = 0{,}4$; $EN = 0{,}4$ м.

Определить реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара сил с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического подшипника – на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от точки D к D', предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx}=0,\ X_A+X_B+F\cos 60^\circ=0; \tag{1}$$

$$\sum F_{ky}=0,\ Y_A-N\cos 30^\circ=0; \tag{2}$$

$$\sum F_{kz}=0,\ Z_A+Z_B-P+N\sin 30^\circ-F\sin 60^\circ=0; \tag{3}$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right)=0,\ M-P\cdot\frac{AB}{2}+Z_B\cdot AB-F\sin 60^\circ\cdot AB+N\sin 30^\circ\cdot AB=0; \tag{4}$$

$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right)=0,\ P\cdot\frac{AC}{2}-N\sin 30^\circ\cdot AC+F\sin 60^\circ\cdot\frac{AC}{2}-F\cos 60^\circ\cdot BE=0; \tag{5}$$

$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right)=0,\ -F\cos 60^\circ\cdot AB-N\cos 30^\circ\cdot AC-X_B\cdot AB=0. \tag{6}$$

Для определения моментов силы $\overline{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, параллельные осям x и z ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин, решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

$Z_A = 4{,}8$ кН; $X_B = 7{,}4$ кН; $Z_B = 2{,}1$ кН; $N = 5{,}9$ кН.

Ответ. $X_A = 3{,}4$ кН; $Y_A = 5{,}1$ кН; $Z_A = 4{,}8$ кН; $X_B = -7{,}4$ кН; $Z_B = 2{,}1$ кН; $N = 5{,}9$ кН.

Знаки показывают, что стержни *2* и *6* сжаты; остальные – растянуты.

4. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр (шифр зачетной книжки), группа.

При чтении текста каждой задачи необходимо учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. Все линии на рисунках к задачам С1–С4, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными. В тексте задач это специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице все величины, относящиеся к ним, должны иметь соответствующие номера.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

2. Решение каждого задания обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Перед выполнением задания необходимо записать его условие, выбранные в соответствии с вариантом исходные данные, изобразить расчетную схему. Расчетная схема должна быть вычерчена в масштабе, с ука-

занием всех размеров, числовых данных и осей, используемых в расчете. Нагрузки следует показать в соответствии с их действительными направлениями.

3. При выполнении задания сначала надо наметить ход решения и те допущения, которые могут быть положены в его основу, а затем произвести расчет. При этом все необходимые вычисления (по возможности) сначала нужно проделать в общем виде, обозначая все данные и искомые величины буквами, после чего вместо буквенных обозначений поставить их числовые значения и найти результат. Везде необходимо придерживаться стандартных обозначений. Расчеты должны быть выполнены в определенной последовательности, теоретически обоснованы и сопровождаться пояснительным текстом.

Решение записывается подробно и аккуратно со всеми вычислениями, вспомогательными чертежами и пояснениями. При выполнении расчетов необходимо указывать литературу с отметкой страниц и таблиц, откуда взяты расчетные формулы, расчетные напряжения и другие величины.

4. Все расчеты должны производиться в единицах СИ. Вычисления следует вести с обычной в технических расчетах точностью (до трех значащих цифр после запятой).

5. Выполненные контрольные работы должны быть высланы в университет на рецензирование. Работы, поступившие на рецензирование позже установленного срока, рассмотрению не подлежат.

6. После рецензирования контрольной работы необходимо внести в соответствии с замечаниями рецензента требуемые исправления (не в тексте решения, а в конце тетради на чистых листах после заголовка «Исправления к заданию»).

7. Если количество замечаний невелико и ошибки, допущенные студентом при выполнении контрольной работы, несущественны, т.е. требуется незначительная ее доработка, рецензент делает на обложке запись «К защите допускается».

В противном случае, если требуется существенно переработать контрольную работу или переписать ее заново, рецензент делает на обложке запись «К защите не допускается» (с соответствующим комментарием).

8. Запрещается стирать или заклеивать отмеченные преподавателем ошибки.

9. Работы, оформленные небрежно и без соблюдения предъявляемых к ним требований, а также работы, выполненные не по своему варианту, не рассматриваются и не засчитываются, возвращаются для переделки. К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

ВЫБОР ВАРИАНТА

Студент выбирает номер рисунка *по предпоследней* цифре шифра, а номер условия в таблице – *по последней цифре шифра.*

5. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ) СТУДЕНТОВ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ

1. Аксиома двух сил. Аксиома присоединения, удаления.
2. Аксиома параллелограмма сил.
3. Аксиома равенства действия и противодействия.
4. Понятия связи. Реакция связи.
5. Реакция гладкой поверхности. Реакция нити.
6. Реакция подпятника. Реакция сферического шарнира.
7. Реакция цилиндрического подшипника. Реакция жесткой заделки.
8. Определение сходящейся системы сил. Способы определения равнодействующей силы.
9. Аналитический способ определения равнодействующей сходящейся системы сил.
10. Геометрическое условие равновесия сходящихся систем сил.
11. Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил.
12. Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.
13. Теорема о трех силах.
14. Плоская ферма. Методы ее расчета.
15. Момент силы относительно центра. Векторный момент силы относительно центра.
16. Момент силы относительно оси.
17. Аналитические формулы определения векторного момента относительно центра.
18. Понятие пары сил. Определение момента пары сил.
19. Теорема о переносе пары сил в параллельную плоскость.
20. Теорема эквивалентности пар сил.
21. Теорема сложения пар сил.
22. Условия равновесия пар сил.
23. Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил.
24. Формулы для определения главного вектора и главного момента в декартовой системе координат.
25. Частные случаи приведения системы сил в плоскости.
26. Частные случаи приведения системы сил в пространстве.
27. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

28. Условие равновесия произвольной плоской системы сил.
29. Условие равновесия произвольной пространственной системы сил.
30. Равновесие произвольной системы параллельных сил.
31. Центр тяжести (объема, площади, однородной пространственной линии).
32. Способы определения центра тяжести тел.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Аркуша, А. И.* Руководство к решению задач по теоретической механике: учеб. пособие для студ. машиностроительных специальностей средних спец. учеб. заведений / А. И. Аркуша. – 4-е изд., испр. – Москва : Высшая школа, 1999. – 336 с.

2. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Статика и кинематика : учеб. пособие для втузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 10-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Политехника, 1995. – 670 с.

3. *Воронков, И. М.* Курс теоретической механики / И. М. Воронков. – 16-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1996. – 494 с.

4. *Лачуга, Ю. Ф.* Теоретическая механика: учебник для студентов вузов по агроинженерным специальностям / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – Москва : Колос, 2000. – 576 с.

5. *Мещерский, И. В.* Задачи по теоретической механике: учеб. пособие для студентов вузов, обуч. по техническим специальностям / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 37-е изд., испр. – СПб.: ЛАНЬ, 1998. – 448 с.

6. *Руденок, Е. Н.* Техническая механика. Сборник заданий: учебное пособие / Е. Н. Руденок, В. П. Соколовская. – Минск : Выш.шк., 1990. – 238 с.

7. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Статика. Кинематика: в 2-х ч: учеб. пособие для студентов втузов. Ч. 1 / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : УП «Технопринт», 2001. – 366 с.

8. Сборник задач по теоретической механике с решениями. Динамика. В 2-х ч: учебное пособие для студентов втузов. Ч. 2 / В. А. Акимов [и др.]. – Минск : УП «Технопринт», 2001. – 576 с.

9. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики : учебник для студентов втузов / С. М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2008. – 416 с.

19. *Федута, А. А.* Теоретическая механика и методы математики: учеб. пособие для студентов втузов / А. А. Федута, А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев. – Минск : УП «Технопринт», 2000. – 504 с.

Дополнительная

1. Статика : методические указания по теоретической механике для студ. АМФ по спец. С.03.01.00 «Механизация сельского хозяйства» / сост. : Н. Н. Филиппова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2002. – 30 с.

2. Статика, кинематика: методические указания по теоретической механике для студ. после техникума АМФ по спец. 74 06 01 Техническое обеспечение процессов с.-х. производства, 74 06 02 Техническое обеспечение процессов хранения и перераб. с.-х. продукции, 74 06 03 Ремонтно-обслуживающее производство в с.х., 74 06 06 Материально-техническое обеспечение АПК / сост. : Н. Н. Филиппова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2003. – 45 с.

3. Теоретическая механика : методические указания и задания к вып. контр. работ для студ. заочн. отд. по спец.: 1-74 06 01 Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва, 1-74 06 02 Технич. обеспеч. процессов хранения и перераб. с.-х. продукции / сост. : И. С. Крук, Ю. С. Биза, Т. В. Смагина. – Минск : БГАТУ, 2006. – 76 с.

4. Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания к вып. контр. работ для студ. заочн. отд. по спец.: 1-74 06 01 Технич. обеспеч. процессов с.-х. пр-ва (НИСПО), 1-74 06 03 Ремонтно-обслуж. пр-во в сельском хозяйстве / сост. : И. С. Крук, Т. А. Рубинова. – Минск : БГАТУ, 2006. – 50 с.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Учебно-методический комплекс

Составитель
Ракова Нина Леонидовна

Ответственный за выпуск *А. Н. Орда*
Редактор *Н. А. Антипович*
Компьютерная верстка *А. И. Стебуля*

Подписано в печать 29.04.2010 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 5,12. Тираж 100 экз. Заказ 62.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552841 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.